

شبيه ساز کنکور (۲)

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۵	۱۰	۱۶	۹	۴	۲۱	۱۵
فیزیک	۸	۹	۱۸	-	۴	۲۲	۹
شیمی	۵	۱۱	۱۰	۴	۵	۱۹	۶

ریاضیات

۱- گزینه ۲

گام ۱ باید سعی کنیم زیر رادیکال ها مربع کامل بسازیم. خود « $4 \pm \sqrt{7}$ » و « $6 \pm \sqrt{11}$ » را نمی توانیم به فرم مربع کامل بنویسیم، اما دو برابرشان، یعنی « $8 \pm 2\sqrt{7}$ » و « $12 \pm 2\sqrt{11}$ » مربع کامل اند، ببینید:

$$8 \pm 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} \pm 1)^2 \quad (1) \quad \text{و} \quad 12 \pm 2\sqrt{11} = (\sqrt{11} \pm 1)^2 \quad (2)$$

گام ۲ بنابراین صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می کنیم تا زیر رادیکال ها همگی دو برابر بشوند:

$$M = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{6-\sqrt{11}} + \sqrt{6+\sqrt{11}})}{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}})} = \frac{(\sqrt{12-2\sqrt{11}} + \sqrt{12+2\sqrt{11}})}{(\sqrt{8+2\sqrt{7}} + \sqrt{8-2\sqrt{7}})}$$

گام ۳ تساوی های (۱) و (۲) را در کسر آخر جای گذاری می کنیم:

$$M = \frac{\sqrt{(\sqrt{11}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{11}+1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}} = \frac{|\sqrt{11}-1| + |\sqrt{11}+1|}{|\sqrt{7}+1| + |\sqrt{7}-1|}$$

داخل همه قدرمطلق ها مثبت اند؛ پس خودشان را از قدرمطلق بیرون می آوریم:

$$M = \frac{(\sqrt{11}-1) + (\sqrt{11}+1)}{(\sqrt{7}+1) + (\sqrt{7}-1)} = \frac{2\sqrt{11}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$$

۲- گزینه ۱

درس نامه ۱ اگر a ، b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، می توانیم

رابطه مقابل را برایشان بنویسیم: $a+c=2b$ یا وسطی $2 \times$ آخری و اولی

۲ در دنباله های حسابی، قدرنسبت d برابر است با:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

۳ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی را می توانیم به صورت « $t-d$ »، « t » و « $t+d$ » در نظر بگیریم.

گام ۱ به گفته سؤال a ، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی اند؛ پس طبق مورد (۲)

$$c = t-d \quad \text{و} \quad b = t, \quad a = t+d$$

درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$\text{بنابراین معادله } ax^2 - 2bx + c = 0 \text{ به این صورت درمی آید:}$$

$$(t+d)x^2 - (2t)x + (t-d) = 0$$

گام ۲ ریشه های معادله بالا را به کمک Δ به دست می آوریم:

$$x = \frac{2t \pm \sqrt{(-2t)^2 - 4(t+d)(t-d)}}{2(t+d)} = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 4(t^2 - d^2)}}{2(t+d)}$$

$$= \frac{2t \pm \sqrt{4d^2}}{2(t+d)} = \frac{2t \pm 2d}{2(t+d)}$$

چون $d > 0$ است، پس ریشه بزرگتر معادله برابر $1 = \frac{2t+d}{2(t+d)}$ و $\beta = \frac{2t+d}{2(t+d)}$ و ریشه

$$\text{کوچکتر معادله برابر } \alpha = \frac{2t-d}{2(t+d)} = \frac{2(t-d)}{2(t+d)} = \frac{t-d}{t+d} \text{ است.}$$

گام ۱ تا این جا فهمیدیم جمله های دنباله حسابی، به این صورت اند:

$$\alpha, c, b, a, \beta: \frac{t-d}{t+d}, \frac{t-d}{t+d}, t, \frac{t+d}{t+d}, 1$$

طبق مورد (۲) درس نامه $a_5 - a_4$ ، مساوی d است:

$$1 - (t+d) = d \Rightarrow 1 - t - d = d \Rightarrow t = 1 - 2d \quad (*)$$

$$t - d - \frac{t-d}{t+d} = d \quad \text{هم باید مساوی } d \text{ باشد:}$$

گام ۲ طبق (*) می توانیم به جای t در تساوی بالا بنویسیم $1-2d$:

$$\frac{(1-2d)-d}{1-2d} - \frac{(1-2d)-d}{(1-2d)+d} = d \Rightarrow \frac{1-3d}{1-d} = 4d-1$$

$$\Rightarrow \frac{1-3d}{1-d} = 4d-1 \Rightarrow 1-3d = (1-d)(4d-1)$$

$$\Rightarrow 1-3d = 4d-1 \Rightarrow 4d^2 - 2d = 0$$

$$\Rightarrow 2d(2d-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2d=0 \Rightarrow d=0 & \times \\ 2d-1=0 \Rightarrow d=\frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

گام ۳ به گفته سؤال قدرنسبت عددی مثبت است؛ پس $d = \frac{1}{2}$ را می پذیریم. این مقدار

d را در (*) جای گذاری می کنیم تا به t برسیم:

گام ۴ حالا که t و d را داریم، می توانیم مقدار $\frac{\alpha}{\beta}$ را هم به دست بیاوریم:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{t-d}{t+d} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

۳- گزینه ۲

درس نامه ۱ اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با

شرط $\Delta > 0$ باشند، در این صورت جمع (S) و ضرب (P) این ریشه ها از رابطه های زیر محاسبه می شوند:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

۲ سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در نقطه $(0, c)$ محور y ها را قطع می کند.

گام ۱ طبق مورد (۲) درس نامه، سهمی

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + bx + c$$

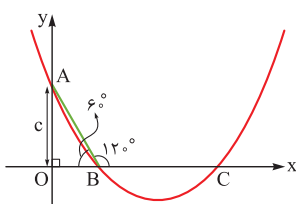
نقطه $A(0, c)$ قطع می کند؛ پس طول AO در شکل

مقابل می شود c . به گفته سؤال $\angle ABC = 120^\circ$

است، پس $\angle ABO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ و در

نتیجه مثلث ABO یک مثلث قائم الزاویه با یک

زاویه 60° است.



۲ جدول ارزش گزاره‌های $p \vee q$ (همون p یا q)، $p \wedge q$ (همون p و q) و $p \Leftrightarrow q$ (همون p اگر تنها و اگر q) به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	د

۳ نقیض گزاره p را با $\sim p$ نشان می‌دهیم. ارزش هر گزاره و نقیضش برعکس هم‌اند.

۴ اول به کمک درس‌نامه، جدول ارزش نقیض گزاره $(\sim q \vee p)$ ، یعنی $(p \Leftrightarrow (\sim q \vee p))$ را می‌کشیم:

p	q	$\sim q$	$\sim q \vee p$	$p \Leftrightarrow (\sim q \vee p)$	$\sim (p \Leftrightarrow (\sim q \vee p))$
د	د	ن	د	د	ن
د	ن	د	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	د

۵ در ادامه جدول ارزش گزینه‌ها را هم می‌کشیم:

p	q	گزینه (۲)	گزینه (۱)	گزینه (۳)	گزینه (۴)
p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim (p \wedge q)$
د	د	د	د	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د
ن	د	د	ن	ن	د
ن	ن	ن	ن	د	د

حالا خوب به ستون‌های رنگی دو جدول قبلی نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید جدول ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow (\sim q \vee p))$ با گزاره $(\sim q \vee p)$ در $\sim$ دقیقاً یکسان است، پس این دو گزاره هم‌ارزند.

۵- گزینه ۴

روش

۱ استراتژی اول طرفین معادله را در عبارتی ضرب کنید که مخرج‌ها حذف شوند؛ بعد سعی کنید با دسته‌بندی مناسب، جملات تکرار شونده بسازید تا بتوانید از تغییر متغیر کمک بگیرید.

۲ طرفین معادله را در $(x-5)(x^2-5)$ ضرب می‌کنیم تا دیگر مخرجی باقی نماند:

$$(x-5)(x^2-5) \left(\frac{x^2}{x-5} + \frac{x}{x^2-5} \right) = -2(x-5)(x^2-5)$$

$$\Rightarrow x^2(x^2-5) + x(x-5) = -2(x^3-5x-5x^2+25)$$

$$\Rightarrow x^4-5x^2+x^2-5x = -2x^3+10x+10x^2-50$$

$$\Rightarrow (x^4+x^2+2x^3) + (-5x^2-5x) = (10x+10x^2)-50$$

حالا می‌توانیم به جای $x^4+x^2+2x^3$ در تساوی بالا بنویسیم $(x^2+x)^2$.

همین‌طور از ۱۰ و ۵۰ هم می‌توانیم فاکتور بگیریم:

$$(x^2+x)^2 - 5(x^2+x) = 10(x^2+x) - 50$$

همان‌طور که در تساوی بالا می‌بینید؛ « x^2+x » سه بار تکرار شده، پس از تغییر متغیر $x^2+x=t$ استفاده می‌کنیم:

$$t^2-5t=10t-50 \Rightarrow t^2-15t+50=0 \Rightarrow (t-5)(t-10)=0 \Rightarrow t=5, 10$$

حالا به جای t ، می‌نویسیم x^2+x :

$$\begin{cases} x^2+x=5 \Rightarrow x^2+x-5=0 & (1) \\ x^2+x=10 \Rightarrow x^2+x-10=0 & (2) \end{cases}$$

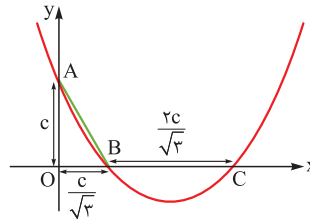
نکته در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ، هر وقت a و c مختلف‌العلامت بودند (یعنی یکی شون مثبت بود؛ اون یکیش منفی)؛ می‌توانید سریعاً بگویید دلتای معادله مثبت است.

۱ در مثلث AOB، برای $\hat{B} = 60^\circ$ تانژانت و سینوس می‌نویسیم تا طول پاره‌های OB و AB را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} \tan 60^\circ = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{c}{OB} \Rightarrow OB = \frac{c}{\sqrt{3}} \\ \sin 60^\circ = \frac{OA}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

به گفته سؤال $AB = BC$ است، پس طول BC هم می‌شود $\frac{2c}{\sqrt{3}}$.

۲ چیزهایی را که تا این‌جا به دست آوردیم روی شکل زیر می‌نویسیم:



همان‌طور که می‌بینید؛ سهمی محور Xها

را در نقطه‌های B و C قطع کرده است؛

پس طول نقاط B و C، ریشه‌های معادله

$$\frac{x^2}{3} + bx + c = 0 \text{ هستند.}$$

طبق نمودار واضح است که طول نقطه B برابر $\frac{c}{\sqrt{3}}$ است. از طرفی $OC = \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{2c}{\sqrt{3}} = \frac{3c}{\sqrt{3}}$

است، پس طول نقطه C هم می‌شود $\frac{3c}{\sqrt{3}}$. حالا می‌توانیم بگوییم $\frac{c}{\sqrt{3}}$ و $\frac{3c}{\sqrt{3}}$ ریشه‌های

معادله $\frac{x^2}{3} + bx + c = 0$ هستند؛ پس جمع و ضرب ریشه‌ها برابر می‌شوند با:

$$\begin{cases} S = \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{3c}{\sqrt{3}} = \frac{4c}{\sqrt{3}} & (1) \\ P = \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{3c}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3c^2}{3} = c^2 & (2) \end{cases}$$

۳ به کمک مورد (۱) درس‌نامه، S و P را از روی معادله $\frac{x^2}{3} + bx + c = 0$ هم به دست می‌آوریم:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{b}{\frac{1}{3}} = -3b \text{ و } P = \frac{c}{a} = \frac{c}{\frac{1}{3}} = 3c$$

حالا S و P به دست آمده را در رابطه‌های (۱) و (۲) جای گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}c = c^2 \xrightarrow{c \neq 0} c = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}b}{3} = \frac{4c}{\sqrt{3}} \xrightarrow{c = \frac{\sqrt{3}}{3}} b = -\frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

بنابراین مقدار bc برابر است با:

$$bc = -\frac{4\sqrt{3}}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4 \times 3}{3 \times 9} = -\frac{4}{9}$$

مشاوره دیگر باید به سؤالات ترکیبی عادت کنید.

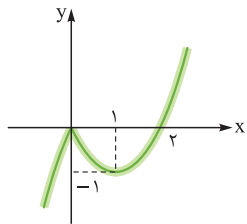
۴- گزینه ۳

۱ استراتژی اول جدول ارزش گزاره $(P \Leftrightarrow (\sim q \vee p))$ را بکشید؛ بعد ستون آخر این جدول را با ارزش گزاره گزینه‌ها مقایسه کنید تا گزینه درست خودش را لو بدهد.

۲ درس‌نامه جدول ارزش n گزاره، 2^n سطر (حالت) دارد. مثلاً جدول ارزش ۳ گزاره p، q و r، $2^3 = 8$ سطر دارد؛ ببینید:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

حالا قسمت رنگی نمودارهای قبلی را کنار هم می‌گذاریم تا به نمودار تابع $f(x)$ برسیم:



گام ۱ همان‌طور که می‌بینید؛ تابع $f(x)$ در بازه $[0, 1]$ نزولی اکید است. ضابطه تابع در این قسمت به صورت $y = x^2 - 2x$ است. به کمک مورد (۳) درس‌نامه، ضابطه وارونش را در بازه $[0, 1]$ به دست می‌آوریم. اول سعی می‌کنیم x را تنها کنیم:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x \Rightarrow y = (x^2 - 2x + 1) - 1 \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 1 \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 = y + 1 \Rightarrow |x - 1| = \sqrt{y + 1} \\ \text{چون } 0 \leq x \leq 1 \text{ است، پس } x - 1 \leq 0 \text{ و در نتیجه به جای } |x - 1| \text{ باید بنویسیم } -(x - 1): \\ -(x - 1) &= \sqrt{y + 1} \Rightarrow 1 - x = \sqrt{y + 1} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{y + 1} \end{aligned}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = 1 - \sqrt{x + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x + 1}$$

ضابطه وارون را به دست آوردیم؛ فقط می‌ماند دامنه‌اش. در قسمت (۲) درس‌نامه گفتیم که برد f برابر با دامنه f^{-1} است. طبق نمودار تابع $f(x)$ ، برد تابع در بازه $[0, 1]$ ، بازه $[-1, 0]$ است، پس می‌توانیم بگوییم دامنه $f^{-1}(x)$ می‌شود $[-1, 0]$:

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x + 1}, -1 \leq x \leq 0$$

تیزبازی بعد از این که فهمیدیم $D_{f^{-1}} = [-1, 0]$ با امتحان کردن یک نقطه می‌توانستیم بفهمیم درست است یا **۴**، ببینید:

$$f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 1 - \sqrt{0 + 1} = 0 \quad \checkmark$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 1 + \sqrt{0 + 1} = 2 \quad \times$$

گزینه ۴

درس‌نامه ۱ به هر تابع کسری با ضابطه $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ به شرطی که $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ باشد، یک تابع هموگرافیک می‌گوییم.

۲ در توابع هموگرافیکی هر وقت a و d قرینه همدیگر باشند، f و f^{-1} برابر می‌شوند؛ این یعنی وارون تابع هموگرافیکی $y = \frac{ax + b}{cx + a}$ می‌شود خودش.

۳ به ازای $f^{-1}(f(x)) = x$ ، $x \in D_f$ می‌شود.

گام ۱ محاسبه مستقیم $(f \circ f \circ f)(x)$ طولانی است؛ پس احتمالاً نکته‌ای وجود دارد که به کمکش می‌توانیم ضابطه داده‌شده را به دست بیاوریم. در تابع هموگرافیک

$$f(x) = \frac{1x + 0}{2x - 1}, a = 1, d = 0 \text{ قرینه همدیگرند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه } f^{-1} \text{ برابرند.}$$

گام ۲ حالا حق داریم به جای f آبی‌رنگ در تابع $f(f(f(x)))$ ، بنویسیم f^{-1} تا تابع ساده شود:

$$f(f(f(x))) = f(x) = \frac{x}{2x - 1}$$

گام ۳ الان که می‌دانیم $f(f(f(x))) = f(x)$ است، می‌توانیم معادله داده‌شده را به راحتی حل کنیم:

$$\begin{aligned} f(f(f(x))) &= 2x \Rightarrow f(x) = 2x \Rightarrow \frac{x}{2x - 1} = 2x \\ &\Rightarrow 4x^2 - 2x = x \Rightarrow 4x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(4x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها می‌شود $\frac{3}{4}$.

در هر دو معادله (۱) و (۲)، ضرایب a و c مختلف‌العلامت‌اند؛ پس طبق نکته بالا دلتای هر دو معادله مثبت و در نتیجه ضرب ریشه‌های هر کدام برابر است با:

$$\begin{cases} x^2 + x - 5 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} P_1 = -\frac{5}{1} = -5 \\ x^2 + x - 10 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} P_2 = -\frac{10}{1} = -10 \end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب کل ریشه‌های معادله می‌شود:

$$P_1 P_2 = (-5)(-10) = 50 = \text{حاصل‌ضرب کل ریشه‌ها}$$

روش گام ۱ بیایید به جای x^2 بنویسیم y :

$$\frac{x^2}{x - 5} + \frac{x}{x^2 - 5} = -2 \xrightarrow{x^2 = y} \frac{y}{x - 5} + \frac{x}{y - 5} = -2$$

حالا طرفین معادله را در $(x - 5)(y - 5)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x - 5)(y - 5) \left(\frac{y}{x - 5} + \frac{x}{y - 5} \right) = -2(x - 5)(y - 5)$$

$$\Rightarrow \underbrace{y(y - 5)}_{y^2 - 5y} + \underbrace{x(x - 5)}_{x^2 - 5x} = -2(\underbrace{xy - 5x - 5y + 25}_{-5(x + y)})$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5(x + y) = -2xy + 10(x + y) - 50$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 + 2xy) - 15(x + y) + 50 = 0$$

گام ۲ الان می‌توانیم به جای $x^2 + y^2 + 2xy$ از $(x + y)^2$ استفاده کنیم:

$$(x + y)^2 - 15(x + y) + 50 = 0$$

در آخر x^2 را به معادله برمی‌گردانیم؛ یعنی به جای y می‌نویسیم x^2 :

$$(x + x^2)^2 - 15(x + x^2) + 50 = 0$$

ادامه حل هم مثل روش اول است.

گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اگر f در بازه‌ای یک‌به‌یک باشد، در این بازه وارون پذیر است.

۲ دامنه تابع وارون برابر برد تابع است و برعکس، یعنی: $D_{f^{-1}} = R_f$ ، $R_{f^{-1}} = D_f$

۳ برای پیدا کردن ضابطه f^{-1} ، x را برحسب y پیدا کرده و جای y و x را عوض می‌کنیم.

۴ اگر $(a, b) \in f$ ، آن‌گاه $(b, a) \in f^{-1}$. به زبان دیگر اگر $f(a) = b$ ، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$.

۵ برای پیدا کردن $f^{-1}(a)$ کافی است معادله $f(x) = a$ را حل کنیم.

۶ نمودار f و f^{-1} نسبت به نیم‌ساز ناحیه اول و سوم (خط $y = x$) قرینه یکدیگر هستند.

۷ برای هر $x \in D_f$ داریم $f^{-1}(f(x)) = x$ و برای هر $x \in D_{f^{-1}}$ داریم:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

۸ اگر f اکیداً صعودی باشد، جواب‌های معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ و $f(x) = x$ یکسان است.

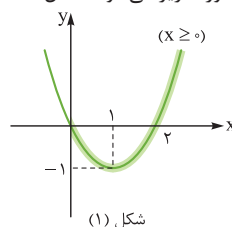
گام ۱ ضابطه تابع f را می‌توانیم به صورت $f(x) = (x - 2)\sqrt{x} = (x - 2)|x|$ بنویسیم. $x = 0$ ، ریشه داخل قدرمطلق است، پس اگر دامنه تابع را به دو قسمت $x \geq 0$ و $x < 0$ تقسیم کنیم؛ می‌توانیم تابع رو به صورت زیر، بدون قدرمطلق بنویسیم.

$$f(x) = \begin{cases} (x - 2)x & x \geq 0 \\ -(x - 2)x & x < 0 \end{cases}$$

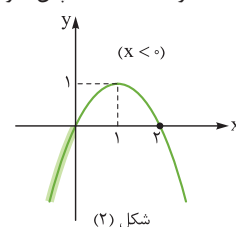
گام ۲ حالا باید نمودار تابع را بکشیم:

♦ $y = (x - 2)x = x^2 - 2x$ ، یک سهمی با مختصات رأس $(1, -1)$ و ریشه‌های $x = 0$ و $x = 2$ است؛ پس نمودارش به صورت زیر است (شکل (۱)).

♦ سهمی $y = -(x - 2)x = -x^2 + 2x$ هم یک سهمی با مختصات رأس $(1, 1)$ و ریشه‌های $x = 0$ و $x = 2$ است؛ پس نمودارش به صورت زیر می‌شود (شکل (۲)).



شکل (۱)



شکل (۲)



۸- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اتحادهای مقدماتی زیر را بلد باشید:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{یا} \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{یا} \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

۲ عبارت لگاریتمی $\log_A B$ به سه شرط قابل تعریف است:

(الف) $B > 0$ (ب) $A > 0$ (پ) $A \neq 1$

گام ۱ در تساوی $\log_{\sin x} \cos x + \frac{1}{2} \log_{\cos x} (1 - \cos^2 x) = \log_{\sqrt{2}} 2$ به جای

$$1 - \cos^2 x \quad \text{می‌نویسیم} \quad \sin^2 x, \quad \text{به جای} \quad \sqrt{2} \quad \text{هم می‌نویسیم} \quad 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_{\sin x} \cos x + \frac{1}{2} \log_{\cos x} \sin^2 x = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2 = 2 \quad \text{همان} \quad \frac{1}{2} \log_{\cos x} \sin^2 x \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} \log_{\cos x} 2 = 2 \quad \text{همان}$$

$$\log_{\cos x} \sqrt{\sin^2 x} = \log_{\cos x} |\sin x| \quad \text{است:}$$

$$\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} |\sin x| = 2$$

گام ۲ در تساوی بالا، $\log_{\sin x} \cos x$ داریم که یکی از شرط‌های قابل تعریف بودنش این است که $\sin x > 0$ باشد. از این شرط نتیجه می‌گیریم که $|\sin x| = \sin x$ و در نتیجه تساوی بالا به این صورت درمی‌آید:

$$\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2 \quad (*)$$

گام ۳ حالا فرض می‌کنیم $\log_{\sin x} \cos x = t$ باشد، در این صورت $\log_{\cos x} \sin x = \frac{1}{t}$ می‌شود. تساوی (*) را برحسب t می‌نویسیم:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \xrightarrow{t \neq 0} t^2 + 1 = 2t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

گام ۴ $\log_{\sin x} \cos x$ را t فرض کرده بودیم؛ پس:

$$\log_{\sin x} \cos x = 1 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$$

حالا $\log_{\sqrt{2}} 2 \tan x = 1$ را به ازای $\tan x = 1$ حساب می‌کنیم تا به خواسته سؤال برسیم:

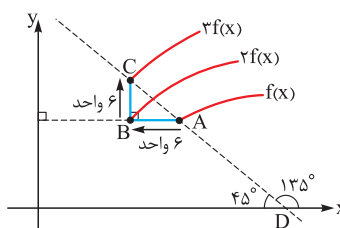
$$\log_{\sqrt{2}} 2(1) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2 = 2$$



۹- گزینه ۲

درس‌نامه اگر $a^x = a^y$ باشد و مطمئن باشیم $a \neq 0, 1$ است، می‌توانیم بگوییم $x = y$ می‌شود.

گام ۱ با توجه به شکل، $\widehat{ADE} = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ است. امتداد AB و محور x ها هر دو بر محور AD عمودند، پس موازی‌اند؛ بنابراین $\widehat{CAB} = 45^\circ$ است. همان‌طور که از شکل پیداست، مثلث ABC قائم‌الزاویه است، یک زاویه‌اش هم 45° شد؛ پس زاویه دیگرش هم 45° و در نتیجه مثلث CAB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، بنابراین $BC = AB = 6$.



گام ۲ فرض می‌کنیم مختصات نقطه A به صورت $A(\alpha, \beta)$ باشد. با توجه به شکل مقابل اگر $A(\alpha, \beta)$ ، 6 واحد به سمت چپ برویم به B می‌رسیم؛ این یعنی اگر از طول نقطه $A(\alpha, \beta)$ ، 6 واحد کنیم به نقطه $B(\alpha-6, \beta)$ می‌رسیم:

و اگر از $B(\alpha-6, \beta)$ ، 6 واحد به سمت بالا برویم، یعنی 6 واحد به عرض نقطه A اضافه کنیم به نقطه C می‌رسیم:

گام ۱ با توجه به شکل قبلی، سه چیز می‌توانیم بگوییم:

♦ روی $A(\alpha, \beta)$ $f(x) = \log_a x$ قرار دارد؛ پس مختصات این نقطه در $f(x)$ صدق می‌کند:

$$\beta = \log_a \alpha \Rightarrow a^\beta = \alpha \quad (1)$$

♦ روی $B(\alpha-6, \beta)$ $y = f(x) = \log_a x$ قرار دارد:

$$\beta = \log_a (\alpha-6) \Rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \log_a (\alpha-6) \Rightarrow a^{\frac{\beta}{\gamma}} = \alpha-6 \quad (2)$$

♦ روی $C(\alpha-6, \beta+6)$ $y = -3f(x) = -3\log_a x$ قرار دارد:

$$\beta+6 = -3\log_a (\alpha-6) \Rightarrow \frac{\beta+6}{3} = \log_a (\alpha-6) \Rightarrow a^{\frac{\beta+6}{3}} = \alpha-6 \quad (3)$$

گام ۲ اگر طرفین تساوی (۲) را به توان ۲ برسانیم به تساوی $a^\beta = (\alpha-6)^2$ می‌رسیم که سمت چپش دقیقاً مثل سمت چپ $a^\beta = \alpha$ است؛ پس سمت راستش هم باید مساوی هم باشند:

$$(\alpha-6)^2 = \alpha \Rightarrow \alpha^2 - 12\alpha + 36 = \alpha \Rightarrow \alpha^2 - 13\alpha + 36 = 0$$

این‌جا باید حواسمان باشد که به ازای $\alpha = 4$ طول نقطه $B(\alpha-6, \beta)$ عددی منفی است که امکان ندارد، چون در ناحیه اول طول نمی‌تواند منفی باشد؛ بنابراین $\alpha = 9$ را می‌پذیریم.

گام ۳ $\alpha = 9$ را در تساوی‌های (۱) و (۲) جای‌گذاری می‌کنیم تا بتوانیم مقدار a را هم به دست بیاوریم:

$$\begin{cases} a^{\frac{\beta+6}{3}} = \alpha-6 & (3) \\ a^\beta = \alpha & (1) \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^{\frac{\beta+6}{3}} = 3 \xrightarrow{(3) \div (1)} \frac{a^{\frac{\beta+6}{3}}}{a^\beta} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow a^{\frac{\beta+6}{3}-\beta} = \frac{1}{3} \Rightarrow a^{\frac{-2\beta+6}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{-2\beta+6}{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

a مبنای لگاریتم است؛ پس نمی‌تواند عددی منفی باشد، بنابراین $a = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ را می‌پذیریم.



۱۰- گزینه ۲

استراتژی در عبارت داده‌شده $\cot 23^\circ$ و $\cot 22^\circ$ حضور دارند. اولی را به صورت $\cot(45^\circ - 22^\circ) = \frac{1}{\tan(45^\circ - 22^\circ)}$ می‌نویسیم. این‌جوری بعد از بازکردن $\tan(45^\circ - 22^\circ)$ فقط زاویه 22° می‌بینیم و ساده‌کردن عبارت برایمان خیلی راحت‌تر می‌شود.

درس‌نامه $\tan(\alpha+\beta)$ و $\tan(\alpha-\beta)$ را به این صورت بازشان می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

گام ۱ طبق «استراتژی»، اول $\cot 23^\circ$ را به کمک مورد (۱) درس‌نامه، برحسب $\tan 22^\circ$ می‌نویسیم:

$$\cot 23^\circ = \cot(45^\circ - 22^\circ) = \frac{1}{\tan(45^\circ - 22^\circ)} = \frac{1}{\frac{\tan 45^\circ - \tan 22^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 22^\circ}} = \frac{1 + \tan 22^\circ}{1 - \tan 22^\circ}$$

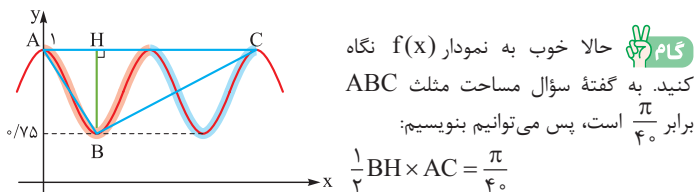
گام ۲ الان می‌توانیم به جای $\cot 23^\circ$ در $(1 - \cot 22^\circ)(1 - \cot 23^\circ)$ بنویسیم $\frac{1 + \tan 22^\circ}{1 - \tan 22^\circ}$ به جای $\cot 22^\circ$ هم می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1 + \tan 22^\circ}{1 - \tan 22^\circ}\right) \left(1 - \frac{1 + \tan 22^\circ}{1 - \tan 22^\circ}\right) \\ &= \left(\frac{\tan 22^\circ - 1}{1 - \tan 22^\circ}\right) \left(\frac{1 - \tan 22^\circ - 1 - \tan 22^\circ}{1 - \tan 22^\circ}\right) \\ &= \left(\frac{\tan 22^\circ - 1}{1 - \tan 22^\circ}\right) \left(\frac{-2 \tan 22^\circ}{1 - \tan 22^\circ}\right) = \frac{-2}{-1} = 2 \end{aligned}$$

در ادامه باید توان دویی را که روی سینوس قرار دارد از بین ببریم. برای این کار به جای α در اتحاد $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ، می‌نویسیم $2bx$: $\sin^2(2bx) = \frac{1 - \cos(4bx)}{2}$ در آخر تساوی بالا را در $(**)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x) = a - c \left(2 + \frac{1 - \cos(4bx)}{2} \right) = a - c \left(2 + \frac{1 - \cos(4bx)}{2} \right)$$

$$a - c \left(2 + \frac{1 - \cos(4bx)}{2} \right) \Rightarrow f(x) = \frac{c}{\lambda} \cos(4bx) + \left(a - \frac{17c}{\lambda} \right)$$



همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید از A تا C دو تناوب کامل داریم (تو شکل بالا یکی از تناوب‌های کامل رو قرمز و اون یکیش رو آبی کردیم)، پس $AC = 2T$ می‌شود. از طرفی واضح است که $BH = 1 - 0.75 = 0.25 = \frac{1}{4}$. این موارد را در تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 2T = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{1}$$

حالا T را به کمک مورد (۶) درس‌نامه، از روی $f(x) = \frac{c}{\lambda} \cos(4bx) + \left(a - \frac{17c}{\lambda} \right)$ هم پیدا می‌کنیم و مساوی $\frac{\pi}{1}$ می‌گذاریم تا b پیدا شود:

$$T = \frac{2\pi}{|B|} \Rightarrow \frac{\pi}{1} = \frac{2\pi}{|4b|} \Rightarrow 4|b| = 2 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$f(x)$ کسینوسی است، پس طبق مورد (۵) درس‌نامه علامت b برایش فرقی ندارد، بنابراین $b = \pm \frac{1}{2}$

باز هم به نمودار گام (۲) توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید نمودار دقیقاً مثل $\cos x$ ، در سمت راست محور y شروعی نزولی دارد؛ پس طبق مورد (۵) درس‌نامه داریم: $A > 0 \Rightarrow \frac{c}{\lambda} > 0 \Rightarrow c > 0$

طبق نمودار، بیشترین مقدار $f(x) = \frac{c}{\lambda} \cos(4bx) + \left(a - \frac{17c}{\lambda} \right)$ برابر ۱ و کم‌ترین مقدارش 0.75 است، پس طبق مورد (۶) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} |A| + C = 1 \Rightarrow \left| \frac{c}{\lambda} \right| + \left(a - \frac{17c}{\lambda} \right) = 1 \xrightarrow{c>0} \frac{c}{\lambda} + a - \frac{17c}{\lambda} = 1 \\ -|A| + C = 0.75 \Rightarrow -\left| \frac{c}{\lambda} \right| + \left(a - \frac{17c}{\lambda} \right) = 0.75 \xrightarrow{c>0} -\frac{c}{\lambda} + a - \frac{17c}{\lambda} = 0.75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \frac{16c}{\lambda} = 1 \\ a - \frac{18c}{\lambda} = 0.75 \end{cases} \xrightarrow{\text{پایینی - بالایی}} \frac{2c}{\lambda} = 0.25 \Rightarrow c = \frac{1}{8}$$

حالا $c = \frac{1}{8}$ را در $a - \frac{16c}{\lambda} = 1$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار a هم معلوم شود: $a - \frac{16}{8} = 1 \Rightarrow a = 3$

بنابراین $abc = 3 \times (\pm \frac{1}{2}) \times \frac{1}{8} = \pm \frac{3}{16}$ می‌شود که تنها مقدار مثبتش در گزینه‌ها است.

گزینه ۲ - ۱۲

درس‌نامه ۱ برای $\sin 2x$ و $\cos 2x$ اتحادهای زیر را بلد باشید:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{و} \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

۱۱ - گزینه ۱

درس‌نامه ۱ اتحاد مقدماتی مقابل را بلد باشید: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۲ به کمک اتحادهای زیر می‌توانیم توان ۲ در $\sin^2$ و $\cos^2$ را از بین ببریم:

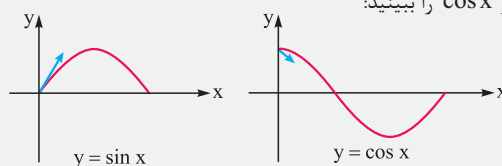
$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

۳ برای $\sin 2\alpha$ اتحاد مقابل را بلد باشید: $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$

۴ برای پیدا کردن دوره تناوب توابع مثلثاتی از روی نمودار، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

تناوب کامل	نصف تناوب	یک چهارم تناوب

۵ نمودار توابع $\sin x$ و $\cos x$ را ببینید:



همان‌طور که می‌بینید، $\sin x$ در سمت راست محور y شروع صعودی ولی $\cos x$ شروع نزولی دارد؛ بنابراین هر وقت نمودار توابعی مثل $y = A \sin(Bx) + C$ و $y = A \cos(Bx) + C$ را دادند، می‌توانید علامت A و B را به صورت زیر مشخص کنید:

(الف) اگر نمودار $y = A \sin(Bx) + C$ دقیقاً مثل $\sin x$ در سمت راست محور y شروع صعودی داشت، $AB > 0$ و در غیر این صورت، $AB < 0$ است.

(ب) اگر نمودار $y = A \cos(Bx) + C$ دقیقاً مثل $\cos x$ در سمت راست محور y شروع نزولی داشت، $A > 0$ و در غیر این صورت، $A < 0$ است. (علامت B ، هم می‌تواند مثبت باشد هم منفی، چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$).

۶ بیشترین و کم‌ترین مقدار و دوره تناوب در توابع به فرم $y = A \cos(Bx) + C$ و $y = A \sin(Bx) + C$ از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\max = C + |A| \quad \text{و} \quad \min = C - |A| \quad \text{و} \quad T = \frac{2\pi}{|B|}$$

گام ۱ با تابع نسبتاً شلوغی طرف هستیم. ساده‌سازی را با ضرب دو پرانتز شروع می‌کنیم:

$$f(x) = a - c(1 + \sin^2(bx))(1 + \cos^2(bx))$$

$$= a - c(1 + \sin^2(bx) + \cos^2(bx) + \sin^2(bx)\cos^2(bx))$$

طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم به جای $\sin^2(bx) + \cos^2(bx)$ بنویسیم ۱:

$$f(x) = a - c(1 + 1 + \sin^2(bx)\cos^2(bx)) \quad (**)$$

بیا باید در اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$ به جای α بنویسیم bx و بعد طرفینش را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin(bx)\cos(bx) = \frac{\sin(2bx)}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2(bx)\cos^2(bx) = \frac{\sin^2(2bx)}{4}$$

تساوی بالا را در $(**)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x) = a - c \left(2 + \frac{\sin^2(2bx)}{4} \right) \quad (***)$$

تله اگر حواسمان به شرط $\frac{a+1}{2} \neq -\frac{1}{2}$ نبود، $a = -2$ را هم جزء جواب‌ها به حساب می‌آوردیم و در تله $\frac{1}{2}$ می‌افتادیم.

مشاوره این سؤال سخت، نگاه نسبتاً جدیدی به معادله‌های مثلثاتی دارد. به همین خاطر اگر حلش نکردید، خیلی جای نگرانی ندارد، پاسخ را خوب بخوانید تا اگر در کنکور هم همچین ایده‌ای دیدید، سورپرایز نشوید.

۱۳- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ هر وقت $u \rightarrow 0$ و در حدمان « $1 - \cos u$ » داشتیم، می‌توانیم به جایش بنویسیم $\frac{u^2}{2}$ ؛ یعنی:

$$1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$$

۲ اگر α و β ریشه‌های عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشند، می‌توانیم به این صورت تجزیه‌اش کنیم:

۳ در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر جای a و c را عوض کنیم، ریشه‌ها معکوس می‌شوند، این یعنی اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ ریشه‌های معادله $cx^2 + bx + a = 0$ هستند.

گام ۱ به گفته سؤال α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + 1 = 0$ هستند؛ پس طبق مورد (۳) درس‌نامه، اگر جای « a » و « 1 » را در $ax^2 + bx + 1 = 0$ عوض کنیم ریشه‌ها معکوس می‌شوند، یعنی $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ ریشه‌های معادله $x^2 + bx + a = 0$ هستند؛ بنابراین می‌توانیم $x^2 + bx + a$ را به این صورت تجزیه کنیم:

$$x^2 + bx + a = (x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta})$$

گام ۲ طبق تساوی بالا می‌توانیم در $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\alpha})^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2 + bx + a)}}{\sqrt{2}|1 - \alpha x|}$ به جای $x^2 + bx + a$ بنویسیم $(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta})$:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\alpha})^+} \frac{\sqrt{1 - \cos((x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta}))}}{\sqrt{2}|1 - \alpha x|}$$

گام ۳ وقتی $x \rightarrow (\frac{1}{\alpha})^+$ عبارت جلوی کسینوس (u) در عبارت

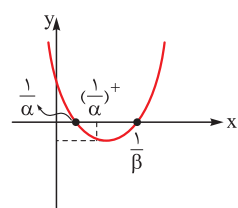
$1 - \cos((x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta}))$ به سمت صفر میل می‌کند؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه

$$\frac{u^2}{2} = \frac{((x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta}))^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\alpha})^+} \frac{\sqrt{\frac{((x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta}))^2}{2}}}{\sqrt{2}|1 - \alpha x|} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\alpha})^+} \frac{|(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta})|}{\sqrt{2}|\frac{1}{\alpha} - x|} \quad (*)$$

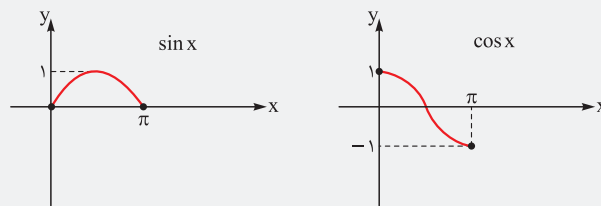
گام ۴ باید قدرمطلق را حذف کنیم. به گفته سؤال $\alpha > \beta > 0$ است؛ پس $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.

الان می‌توانیم برای $(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta})$ می‌توانیم شکل فرضی مقابل را بکشیم. حواسمان هست که ریشه $\frac{1}{\beta}$ سمت راست $\frac{1}{\alpha}$ بگذاریم چون $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$ شد:



$\frac{1}{\alpha} - x$ و $(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta})$ وقتی $x \rightarrow (\frac{1}{\alpha})^+$ عددی منفی هستند؛ پس در حد

۲ نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ به صورت زیرند:



۳ برای پیدا کردن تعداد جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ ، روش هندسی انتخاب مناسبی است. در این روش تعداد نقاط برخورد نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ در یک دستگاه مختصات، همان تعداد جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است.

گام ۱ در معادله $a(\sin x + \sin 2x) = \sin x(2\cos 2x + 1)$ به جای $\sin 2x$ و $\cos 2x$ به ترتیب می‌نویسیم $2\sin x \cos x$ و $2\cos^2 x - 1$:

$$a(\sin x + 2\sin x \cos x) = \sin x(2\cos^2 x - 1 + 1) \Rightarrow a \sin x(1 + 2\cos x) = \sin x(2\cos^2 x - 1)$$

گام ۲ $\sin x$ به ازای π و $x = 0$ صفر می‌شود؛ پس در بازه $(0, \pi)$ ، $\sin x \neq 0$ و در نتیجه حق داریم $\sin x$ را از طریق تساوی بالا بزنیم تا به معادله $a(2\cos x + 1) = 2\cos^2 x - 1$ برسیم. در این معادله هم طبق اتحاد مزدوج، $2\cos^2 x - 1 = (2\cos x + 1)(2\cos x - 1)$ است؛ پس:

$$\Rightarrow a(2\cos x + 1) = (2\cos x + 1)(2\cos x - 1)$$

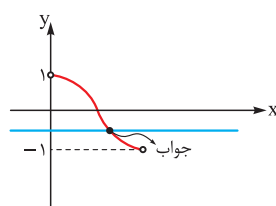
حالا از $(2\cos x + 1)$ فاکتور می‌گیریم:

$$(2\cos x + 1)(a - (2\cos x - 1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\cos x + 1 = 0 \\ a - (2\cos x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} & (1) \\ 2\cos x = a + 1 \Rightarrow \cos x = \frac{a+1}{2} & (2) \end{cases}$$

گام ۳ می‌خواهیم معادله‌های (۱) و (۲) مجموعاً بیش از یک جواب داشته باشند. طبق

مورد (۳) درس‌نامه، این جور وقت‌ها روش هندسی انتخاب مناسبی است. اول نمودار توابع $y = -\frac{1}{2}$ و $y = \cos x$ را به این صورت در یک دستگاه مختصات می‌کشیم. حواسمان هم هست که چون جواب‌های در بازه $(0, \pi)$ را می‌خواهیم، نمودار $\cos x$ را در $x = 0, \pi$ توخالی بکشیم:



گام ۴ همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید قبل از این که $y = \frac{a+1}{2}$ را وارد بازی کنیم، یک جواب داریم؛ پس برای این که معادله‌های (۱) و (۲) مجموعاً بیش از یک جواب داشته باشند، نمودار $y = \frac{a+1}{2}$ باید یک نقطه دیگر، غیر از نقطه آبی‌رنگ بالا را قطع کند. این اتفاق

وقتی می‌افتد که $\frac{a+1}{2}$ اولاً بین ۱ و -۱ باشد و دوماً مساوی $-\frac{1}{2}$ هم نباشد. با شرایطی که گفتیم یکی از $y = \frac{a+1}{2}$ ها را می‌کشیم تا بهتر ببینید در این حالت بیش از یک جواب داریم:

گام ۵ حالا دوتا شرط گام قبل را برای $\frac{a+1}{2}$ اجرا می‌کنیم:

$$(I) \quad -1 < \frac{a+1}{2} < 1 \xrightarrow{\times 2} -2 < a+1 < 2 \xrightarrow{-1} -3 < a < 1$$

$$(II) \quad \frac{a+1}{2} \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow a+1 \neq -1 \Rightarrow a \neq -2$$

در محدوده (I) سه عدد صحیح $a = -2, -1, 0$ وجود دارد که طبق (II) باید $a = -2$ را حذف کنیم؛ پس در مجموع $3 - 1 = 2$ عدد صحیح a خواسته مسئله را برآورده می‌کند.



۱۵- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ نقطه‌ای به طول $x = a$ را روی منحنی $f(x)$ در نظر بگیرید. شیب خطی که در این نقطه بر منحنی $f(x)$ مماس می‌شود برابر $f'(a)$ است.
۲ دو خط وقتی بر هم عمودند که شیبشان قرینه معکوس همدیگر باشد.

گام ۱ اول باید نقطه (یا نقطه‌های) تلاقی دو منحنی را پیدا کنیم. برای این کار جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow (x-1)(x+a) = (x-1)(x+a+2) \\ &\Rightarrow (x-1)(x+a) - (x-1)(x+a+2) = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)((x+a) - (x+a+2)) = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

گام ۲ حالا به کمک مورد (۱) درس‌نامه، شیب خط مماس بر منحنی f را در نقطه $x = 1$ به دست می‌آوریم: $f'(x) = (1)(x+a) + (x-1)(1) = 2x + a - 1 \Rightarrow f'(1) = a + 1$
به همین ترتیب شیب خط مماس بر منحنی g را هم در نقطه $x = 1$ پیدا می‌کنیم.

$g'(x) = (1)(x+a+2) + (x-1)(1) = 2x + a + 1 \Rightarrow g'(1) = a + 3$
گام ۳ به گفته سؤال خطوط مماس، بر هم عمودند؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است:

$$\begin{aligned} f'(1) = -\frac{1}{g'(1)} &\Rightarrow a + 1 = -\frac{1}{a + 3} \Rightarrow (a + 1)(a + 3) = -1 \\ &\Rightarrow a^2 + 4a + 3 = -1 \Rightarrow (a + 2)^2 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

۱۶- گزینه ۴

درس‌نامه برای محاسبه مشتق تابع مرکب $y = f \circ g(x)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y' &= g'(x) \times f'(g(x)) \\ \text{گام ۱} \text{ اول از طرفین تساوی } g(x) &= f(2x+1) - 2f(3x+5) \text{ مشتق می‌گیریم تا به} \\ g'(x) &= (f(2x+1))' - 2(f(3x+5))' \\ &\Rightarrow g'(x) = 2f'(2x+1) - 2 \times 3f'(3x+5) \\ &\Rightarrow g'(x) = 2f'(2x+1) - 6f'(3x+5) \end{aligned}$$

حالا $x = 2$ را در تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم تا $g'(2)$ به دست بیاید:

$$\begin{aligned} g'(2) &= 2f'(\delta) - 6f'(11) \quad (*) \\ \text{گام ۲} \text{ همان‌طور که در تساوی بالا می‌بینید، برای محاسبه } g'(2) &\text{ باید } f'(\delta) \text{ و } f'(11) \text{ را پیدا کنیم. برای این کار از طرفین تساوی } f(x+3) = -f(x) \text{ مشتق می‌گیریم تا به} \\ \text{تساوی } f'(x+3) &= -f'(x) \text{ برسیم. حالا در این تساوی به جای } x, -1 \text{ قرار می‌دهیم تا بتوانیم از } f'(-1) = 3 \text{، استفاده کنیم:} \\ f'(x+3) &= -f'(x) \xrightarrow{x=-1} f'(2) = -f'(-1) = -3 \end{aligned}$$

گام ۳ در ادامه به جای $x, 2$ قرار می‌دهیم تا $f'(\delta)$ پیدا شود:

$$\begin{aligned} f'(x+3) &= -f'(x) \xrightarrow{x=2} f'(\delta) = -f'(2) = +3 \end{aligned}$$

و در آخر به جای $x, 5$ یک بار دیگر ۵ بار دیگر ۸ قرار می‌دهیم تا $f'(11)$ هم پیدا شود:

$$\begin{aligned} f'(x+3) &= -f'(x) \xrightarrow{x=5} f'(11) = -f'(\delta) = -3 \\ f'(x+3) &= -f'(x) \xrightarrow{x=8} f'(11) = -f'(11) = +3 \\ \text{گام ۴} \text{ حالا که می‌دانیم } f'(\delta) &= f'(11) = 3 \text{، می‌توانیم به کمک تساوی } (*) \text{ مقدار} \\ g'(2) &= 2f'(\delta) - 6f'(11) = 6 - 18 = -12 \end{aligned}$$

۱۷- گزینه ۲

استراتژی از هویتال کمک بگیرید.

درس‌نامه مشتق برخی از توابع را در جدول زیر ببینید:

تابع	مشتق
عدد ثابت	صفر
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$

(*) قرینه این عبارات را از قدرمطلق بیرون می‌آوریم. طبق میل سؤال، حد را هم مساوی

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^+} \frac{-(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta})}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}(\frac{1}{\alpha} - x)} &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^+} \frac{-(x - \frac{1}{\alpha})(x - \frac{1}{\beta})}{-2\alpha(\frac{1}{\alpha} - x)} \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^+} \frac{-(x - \frac{1}{\beta})}{2\alpha(1)} &= \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \Rightarrow -\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \\ &\Rightarrow k = -2\alpha \end{aligned}$$

مشاوره ترکیب تابع درجه دوم و حد را قبلاً یک بار در کنکور تجربی داشتیم که ممکن است در کنکور ریاضی هم بیاید؛ پس لطفاً این سؤال را جدی بگیرید.

۱۴- گزینه ۳

درس‌نامه شرط پیوستگی تابع f در $x = a$ این است که $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ باشد، (یعنی حد چپ و راست و مقدار تابع در a موجود و با هم برابر باشند).

گام ۱ برای این که دامنه هر ضابطه را به دست بیاوریم؛ اول باید نامعادله‌های $|x| < x^2$ و $|x| \geq x^2$ را حل کنیم. نمودار توابع $y_1 = |x|$ و $y_2 = x^2$ را به صورت مقابل در یک دستگاه مختصات می‌کشیم.

همان‌طور که می‌بینید، دو نمودار در سه نقطه به طول‌های a, b و صفر همدیگر را قطع می‌کنند. برای پیدا کردن a و b باید معادله $y_1 = y_2$ را حل کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 &= |x| \Rightarrow x^2 = \pm x \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1 \\ x^2 = -x \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1 \end{cases} \end{aligned}$$

a و b که صفر نیستند، پس $b = 1$ و $a = -1$ می‌شود.

گام ۲ در بازه $\{0\} - (-1, 1)$ نمودار تابع $y_2 = x^2$ پایین‌تر از $y_1 = |x|$ است؛ پس جواب نامعادله $|x| < x^2$ مجموعه $\{0\} - (-1, 1)$ است؛ به همین صورت می‌توانیم بگوییم، مجموعه جواب نامعادله $|x| \geq x^2$ هم به صورت « $x \geq 1$ یا $x = 0$ یا $x \leq -1$ » است. پس ضابطه تابع f به این صورت می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x[x] + 1 & -1 < x < 1, x \neq 0 \\ 1 + \cos 2\pi x & x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \text{ یا } x = 0 \end{cases}$$

گام ۳ حالا پیوستگی تابع را در سه نقطه $x = 1, x = -1$ و $x = 0$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \diamond \text{ بررسی پیوستگی در } x = 1: & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + \cos 2\pi = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = (1)[1^-] + 1 = (1 \times 0) + 1 = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

پس تابع در $x = 1$ ، ناپیوسته است.

$$\begin{aligned} \diamond \text{ بررسی پیوستگی در } x = -1: & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = (-1)[(-1)^+] + 1 = (-1)(-1) + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 + \cos(-2\pi) = 1 + \cos 2\pi = 2 \\ f(-1) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

سه مقدار، طبق درس‌نامه برابر شدند، پس تابع در $x = -1$ پیوسته است.

$$\begin{aligned} \diamond \text{ بررسی پیوستگی در } x = 0: & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0[\dots] + 1 = 1 \\ \text{تابع در } x = 0 \text{ ناپیوسته است.} \\ f(0) = 1 + \cos 0 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

پس تابع در دو نقطه ناپیوسته است.



گام ۱ به جای اول به جای $f(x)$ می‌نویسیم $\frac{\sqrt{x}}{x-2}$:
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x)+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\frac{\sqrt{x}}{x-2})^3+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-2)^3-1}$
 همگرافیک است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، نقطه برخورد
 تابع $\begin{matrix} A & B \\ \uparrow & \uparrow \\ X+1 & X+1 \\ \downarrow & \downarrow \\ X+b & X+b \\ C & D \end{matrix}$ مجانب‌هایش برابر است با:

$$W(-\frac{D}{C}, \frac{A}{C}) = (-\frac{b}{1}, \frac{1}{1})$$

گام ۲ در ادامه، طول نقطه عطف تابع درجه سوم $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + a$ را به کمک
 مورد (۲) درس‌نامه پیدا می‌کنیم:

$$x = -\frac{B}{3A} = -\frac{-2}{3(1)} = \frac{2}{3}$$

حالا $x = \frac{2}{3}$ را در ضابطه تابع جای‌گذاری می‌کنیم تا عرض نقطه عطف هم پیدا شود:

$$f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + a = a - \frac{2}{3}$$

پس مختصات نقطه عطف به این صورت می‌شود:

$$A(1, a-2)$$

گام ۳ به گفته سؤال، نقطه عطف تابع درجه سوم بر محل برخورد مجانب‌های تابع
 همگرافیکی، منطبق است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$W(-\frac{b}{1}, \frac{1}{1}) = A(1, a-2) = \begin{cases} -\frac{b}{1} = 1 \Rightarrow b = -1 \\ a-2 = \frac{1}{1} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین مقدار ab برابر می‌شود با:

$$ab = (\frac{3}{2}) \times (-1) = -\frac{3}{2}$$

۲۰- گزینه ۴

گام ۱ عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد، پس دو حالت در
 نظر می‌گیریم.

♦ رقم یکان صفر باشد، با توجه به یک‌درمیان بودن زوج و فردا، داریم:

$$\frac{5}{\text{فرد}} \times \frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{4}{\text{فرد}} \times \frac{1}{\{1\}} = 80$$

$$\rightarrow \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\rightarrow \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

♦ رقم یکان ۵ باشد،

$$\frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{4}{\text{فرد}} \times \frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{1}{\{5\}} = 64$$

صفر اضافه می‌شود.

$$\rightarrow \{1, 3, 7, 9\}$$

$$\rightarrow \{2, 4, 6, 8\}$$

گام ۲ حالا طبق اصل جمع می‌توانیم بگوییم $80 + 64 = 144$ عدد سازگار با شرایط
 مسئله وجود دارد.

۲۱- گزینه ۱

درس‌نامه در یک فضای نمونه‌ای مثل $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، جمع احتمال همه
 برآمدها برابر ۱ می‌شود، یعنی:

$$P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n) = 1$$

گام ۱ به گفته سؤال، احتمال برآمدهای a ، b و c یک دنباله حسابی می‌سازند، پس

$$P(a) = A, \quad P(b) = A + d, \quad P(c) = A + 2d$$

فرض می‌کنیم $d \geq 0$ باشد، این‌جوری $P(a) = A$ ، کوچک‌ترین احتمال می‌شود که طبق

گفته سؤال برابر $\frac{1}{9}$ است، پس:

بنابراین احتمال برآمدها به این صورت می‌شوند:

$$P(a) = \frac{1}{9}, \quad P(b) = \frac{1}{9} + d, \quad P(c) = \frac{1}{9} + 2d$$

گام ۲ طبق درس‌نامه، مجموع همه احتمال‌ها برابر یک است:

$$\frac{1}{9} + (\frac{1}{9} + d) + (\frac{1}{9} + 2d) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + 3d = 1 \Rightarrow 3d = \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{9}$$

گام ۳ بیشترین احتمال است که برابر می‌شود با:

$$P(c) = \frac{1}{9} + 2d = \frac{1}{9} + 2(\frac{2}{9}) = \frac{5}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x)+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\frac{\sqrt{x}}{x-2})^3+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-2)^3-1}$$

گام ۳ با جای‌گذاری $x = 1$ در عبارت جلوی حد، به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس هوییتال می‌زنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-2)^3-1} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \times (x-2)^2 - 3(x-2)^2 \times x}{((x-2)^3)^2} = \frac{-1-3}{1} = \frac{-4}{1} = -4$$

۱۸- گزینه ۴

درس‌نامه اگر $A(\alpha, \beta)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ باشد، می‌توانیم نتیجه

$$f'(\alpha) = 0 \quad (1) \quad f(\alpha) = \beta \quad (2)$$

گام ۱ $x = -1$ ، ریشه داخل قدرمطلق است، پس اگر دامنه تابع را به دو قسمت $x \geq -1$ و $x < -1$ تقسیم کنیم؛ می‌توانیم تابع رو به صورت زیر، بدون قدرمطلق بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax(x+1)}{x+b} & x \geq -1 \\ -\frac{ax(x+1)}{x+b} & x < -1 \end{cases}$$

گام ۲ به گفته سؤال $A(-2, 12)$ ، نقطه اکسترمم تابع $f(x)$ است؛ پس طبق درس‌نامه
 می‌توانیم به دو نتیجه زیر برسیم:

$$\diamond f(-2) = 12 \Rightarrow f(-2) = -2: x = -2 \text{ در دامنه ضابطه پایین قرار دارد، پس:}$$

$$-\frac{2a(-1)}{-2+b} = 12 \Rightarrow \frac{2a}{b-2} = -12 \quad (*)$$

♦ $f'(-2) = 0$ باز هم چون $x = -2$ در ضابطه پایین قرار دارد؛ از این ضابطه مشتق
 می‌گیریم:

$$f(x) = -\frac{ax^2+ax}{x+b} \Rightarrow f'(x) = -\frac{(2ax+a)(x+b)-(ax^2+ax)}{(x+b)^2}$$

حالا معادله $f'(-2) = 0$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow -\frac{((-4a)+a)(-2+b)-(4a-2a)}{(-2+b)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -3a(-2+b)-2a = 0 \xrightarrow{a \neq 0} -2(b-2) = 2 \Rightarrow b = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

گام ۳ حالا $b = \frac{4}{3}$ را در تساوی $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار a هم پیدا شود:

$$\frac{2a}{\frac{4}{3}-2} = -12 \Rightarrow \frac{2a}{-\frac{2}{3}} = -12 \Rightarrow -3a = -12 \Rightarrow a = 4$$

۱۹- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ مجانب افقی و قائم یک تابع همگرافیک مثل $y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$ ، از

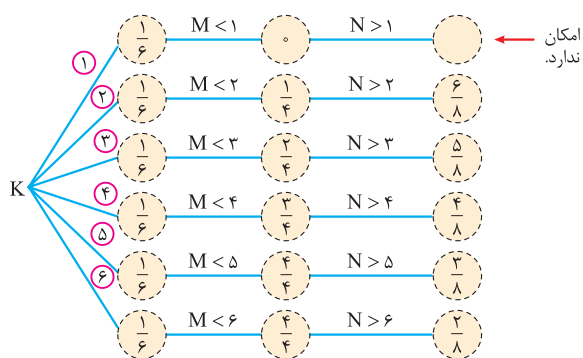
رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \text{مجانب افقی: } y = \frac{A}{C} \text{ یا } \frac{\text{ضریب } x \text{ در صورت}}{\text{ضریب } x \text{ در مخرج}} \\ \text{مجانب قائم: } x = -\frac{D}{C} \text{ یا ریشه مخرج} \end{cases}$$

الان می‌توانیم بگوییم مختصات نقطه برخورد مجانب‌های تابع همگرافیک، به صورت
 $W(-\frac{D}{C}, \frac{A}{C})$ است.

۲ طول نقطه عطف تابع درجه سوم $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ ، از رابطه زیر محاسبه
 می‌شود:

$$\text{طول نقطه عطف} = -\frac{B}{3A}$$



گام ۱ حالا شاخه‌ها را در هم ضرب و اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم تا $P(M < K < N)$ پیدا شود:

$$P(M < K < N) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{6 \times 5 \times 4} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

گام ۲ طبق قانون بیز، برای محاسبه $P(M < K < N)$ به شرط $K = 5$ ، باید احتمال شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنیم. شاخه مطلوب شاخه پنجم است که در آن $K = 5$ است و احتمال کل هم که شد $\frac{1}{8}$ ، پس احتمال مورد نظر برابر می‌شود با:

$$P = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{15}$$

۲۳- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اگر میانگین n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $\bar{x}$ برابر باشد، در این صورت واریانسشان از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۲ مجموع انحراف داده‌ها از میانگین، همیشه صفر است؛ یعنی:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

گام ۱ طبق مورد (۲) درس‌نامه، مجموع انحراف از میانگین داده‌ها، همیشه برابر صفر است؛ پس:

$$5 + (-1) + 0 + a + b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = -5 \quad (*)$$

گام ۲ طبق مورد (۱) درس‌نامه، واریانس برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{5^2 + (-1)^2 + 0^2 + a^2 + b^2 + 1^2}{6} = \frac{a^2 + b^2 + 27}{6}$$

گام ۳ چون حداقل واریانس را می‌خواهیم باید کاری کنیم که $a^2 + b^2$ کم‌ترین مقدار خودش را داشته باشد. در گام (۱) دیدیم که $a + b = -5$ شد؛ پس $a^2 + b^2$ وقتی حداقل می‌شود که فاصله a و b حداقل شود. بنابراین a و b را -3 و -2 در نظر می‌گیریم؛ این‌جوری هم رابطه $(*)$ برقرار است، هم فاصله a و b حداقل.

حالا می‌توانیم بگوییم حداقل واریانس برابر است با:

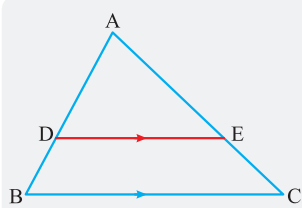
$$\text{حداقل واریانس} = \frac{(-2)^2 + (-3)^2 + 27}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} = 6 \frac{2}{3}$$

۲۴- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ در شکل مقابل اگر $DE \parallel BC$ باشد، طبق قضیه تالس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{جزء به جزء})$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (\text{جزء به کل})$$



۲۲- گزینه ۱

شفاف‌سازی «اگر شماره کارت مدیسا کوچک‌تر از کیمیا و شماره کارت کیمیا کوچک‌تر از نازنین باشد، با کدام احتمال شماره کارت کیمیا، ۵ بوده است؟» یعنی $P(M < K < N)$ را به دست بیاورید به شرطی که $K = 5$ باشد.

درس‌نامه قانون بیز: در فرم شرطی احتمال کل، اول احتمال کل را به کمک نمودار درختی حساب کنید، بعد شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنید.

گام ۱ طبق شفاف‌سازی، با فرم شرطی احتمال کل طرف هستیم. اول احتمال $P(M < K < N)$ (احتمال کل) را حساب می‌کنیم. بیایید مسئله را روی کارت‌های کیمیا حالت‌بندی کنیم. کیمیا شش کارت با شماره‌های ۱ تا ۶ دارد، پس شش حالت داریم:

۱. $K = 1$ باشد: طبق خواسته سؤال در این حالت باید $M < 1 < N$ شود. این حالت امکان ندارد، چون $M < 1$ ، یعنی شماره کارت مدیسا کوچک‌تر از ۱ شود که اصلاً کارت با چنین شماره‌ای وجود ندارد.

۲. $K = 2$ باشد: در این حالت داریم:

$$M < 2 < N \quad (1)$$

همان‌طور که می‌بینید در این حالت ۶ کارت از ۸ کارت نازنین و همین‌طور یکی از کارت‌های مدیسا قابل قبول است.

۳. $K = 3, 4, 5, 6$ باشد: به همین ترتیب می‌توانیم نامساوی‌های زیر را بنویسیم. در هر نامساوی، شماره کارت‌های قابل قبول برای نازنین (N) و مدیسا (M) را هم می‌نویسیم:

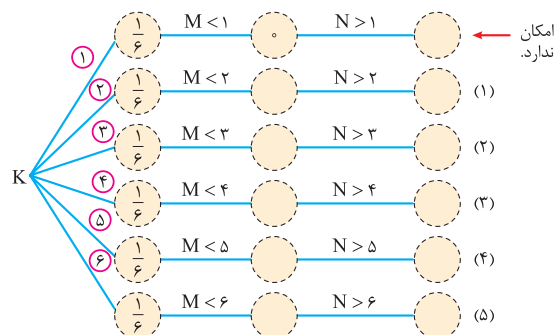
$$K = 3: M < 3 < N \quad (2)$$

$$K = 4: M < 4 < N \quad (3)$$

$$K = 5: M < 5 < N \quad (4)$$

$$K = 6: M < 6 < N \quad (5)$$

گام ۲ طبق حالت‌بندی‌ای که کردیم نمودار درختی را باید با کارت‌های کیمیا شروع کنیم. کیمیا ۶ کارت دارد که احتمال برداشتن هر کدامشان $\frac{1}{6}$ است، پس نمودار درختی را به صورت زیر می‌کشیم:



حالا باید دایره‌های توخالی بالا را پر کنیم. در گام (۱) دیدیم حالتی که $K = 1$ باشد، امکان‌پذیر نیست؛ پس با این شاخه کاری نداریم. اما در شاخه بعدی طبق نامساوی (۱) برای M ، ۱ کارت از ۶ کارت و برای N ، ۴ کارت از ۸ کارت قابل قبول هستند؛ پس اعدادی که باید در این شاخه بنویسیم $\frac{1}{6}$ و $\frac{4}{8}$ هستند. به همین ترتیب می‌توانیم به کمک نامساوی‌های (۲) تا (۵) بقیه دایره‌های توخالی را هم پر کنیم تا نمودار درختی به این صورت تکمیل بشود:

گام ۱ (محاسبه طول پاره‌خط‌های مورد نیاز): در گام چهارم دیدیم که عرض DI از مستطیل $DIH'H$ را نصف می‌کند؛ پس عرض دیگرش، یعنی $H'H$ را هم در نقطه E نصف می‌کند، یعنی $EH' = EH'' = \frac{4}{2} = 2$.

♦ **محاسبه طول DH'' و IH' :** خوب به مثلث AEC در شکل قبل نگاه کنید. در این مثلث IH' و DH'' هر دو بر BC عمودند، پس موازی‌اند؛ بنابراین می‌توانیم در این مثلث تالس جزء به کل بنویسیم:

$$\frac{CI}{CA} = \frac{IH'}{AE} \Rightarrow \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{IH'}{4\sqrt{3}} \Rightarrow IH' = 4\sqrt{3}$$

IH' و DH'' هر دو طول مستطیل $DIH'H$ هستند؛ پس مساوی‌اند:

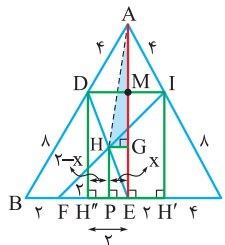
$$DH'' = IH' = 4\sqrt{3}$$

♦ **محاسبه طول PE و HG :** قبل از شروع محاسبات، فرض می‌کنیم $PE = x$ باشد، در این صورت طبق شکل بالا $PH = 2 - x$ می‌شود. حالا خوب به مثلث‌های FIH' و DEH'' نگاه کنید. در این مثلث‌ها به خاطر موازی بودن سه پاره‌خط IH' ، DH'' و HP می‌توانیم تالس جزء به کل بنویسیم:

$$\begin{cases} \triangle FIH' : \frac{FP}{FH'} = \frac{HP}{IH'} \Rightarrow \frac{2 + (2 - x)}{2 + 2 + 2} = \frac{HP}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4 - x}{6} = \frac{HP}{4\sqrt{3}} & (1) \\ \triangle DEH'' : \frac{EP}{EH''} = \frac{HP}{DH''} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{HP}{4\sqrt{3}} & (2) \end{cases}$$

سمت راست تساوی‌های (۱) و (۲) برابرند؛ پس سمت چپشان هم باید برابر باشند:

$$\begin{aligned} \frac{4 - x}{6} &= \frac{x}{2} \Rightarrow 4 - x = 3x \\ \Rightarrow 4x &= 4 \Rightarrow x = 1 \\ \xrightarrow{PE=HG=x} &HG = 1 \end{aligned}$$



الان که طول AE و GE را داریم می‌توانیم طول AG را هم حساب کنیم:

$$AG = AE - GE = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

♦ **گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال):** حالا خوب به مثلث قائم‌الزاویه AHG در شکل مقابل نگاه کنید.

در این مثلث طول HG و AG را داریم؛ پس می‌توانیم خواسته سؤال یعنی طول AH را هم به کمک قضیه فیثاغورس به دست بیاوریم:

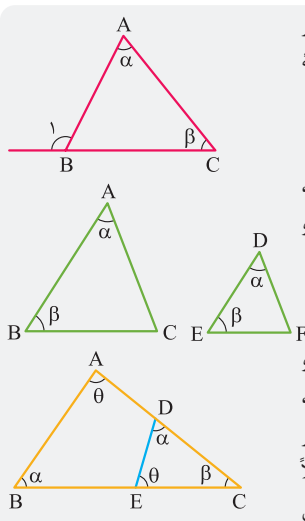
$$AH^2 = HG^2 + AG^2 = 1^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow AH^2 = 49 \Rightarrow AH = 7$$

۲۵ - گزینه ۳

♦ **درس‌نامه ۱** هر زاویه خارجی مثلث، برابر با جمع زاویه‌های داخلی غیرمجاورش است. مثلاً زاویه خارجی B_1 در شکل مقابل می‌شود: $B_1 = \alpha + \beta$

♦ **۲** هر وقت دو مثلث، دو زاویه برابر داشته باشند، متشابه‌اند. مثلاً در شکل مقابل، مثلث‌های ABC و DEF با دو زاویه برابر α و β متشابه‌اند.

♦ **۳** برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت می‌نویسیم، به طوری که در صورت نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل مقابل



♦ **۲** عکس قضیه تالس هم برقرار است؛ یعنی از برقراری هر یک از تناسب‌های قبلی می‌توانیم نتیجه بگیریم که DE با BC موازی است.

♦ **۳** در شکل مقابل، اگر $DE \parallel BC$ باشد، AG ، پاره‌خط‌های DE و BC را به یک نسبت قطع می‌کند؛ یعنی:

$$\frac{DF}{FE} = \frac{BG}{GC}$$

مثلاً اگر AG ، BC را نصف کند، DE را هم حتماً نصف می‌کند.

♦ **۴** در هر مثلث متساوی‌الساقین، مثل ABC در شکل مقابل، میانه AH ، نیمساز و ارتفاع هم است.

♦ **گام ۱ (تحلیل مثلث ABC):** همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، در مثلث ABC ، طول ضلع‌های AB و AC هر دو مساوی « $12 = 4 + 8$ » اند؛ پس این مثلث متساوی‌الساقین است. در این مثلث، $BE = EC$ ؛ پس E وسط ضلع BC و در نتیجه AE میانه است.

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، طبق مورد (۴) درس‌نامه، میانه AE ، ارتفاع هم هست؛ پس $\hat{E} = 90^\circ$.

♦ **گام ۲ (تشخیص استراتژی حل):** بیاید مثل شکل مقابل از H به AE عمود کنیم؛ این‌جوری مثلث قائم‌الزاویه AGH درست می‌شود که به کمک فیثاغورس در آن، می‌توانیم خواسته سؤال، یعنی AH را به دست بیاوریم، فقط باید طول AG و HG را حساب کنیم.

♦ **گام ۳ (محاسبه طول AE):** طول AE را می‌توانیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث AEC حساب کنیم:

$$\begin{aligned} AE^2 + EC^2 &= AC^2 \Rightarrow AE^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow AE^2 = 12^2 - 6^2 = 6^2(2^2 - 1^2) \\ \Rightarrow AE &= \sqrt{6^2 \times 3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

♦ **گام ۴ (تحلیل وضعیت DI و BC):** مطابق شکل، DI را می‌کشیم. با توجه به اندازه‌های روی شکل،

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AI}{IC} = \frac{4}{8}$$

است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه عکس قضیه تالس می‌توانیم بگوییم $DI \parallel BC$ با BC موازی است.

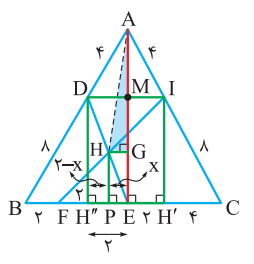
از این موضوع دو جا کمک می‌گیریم:

♦ **محاسبه طول DI:** چون $DI \parallel BC$ شد، طبق مورد (۱) درس‌نامه، می‌توانیم به کمک جزء به کل در مثلث ABC ، طول DI را حساب کنیم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DI}{BC} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{DI}{12} \Rightarrow DI = 4$$

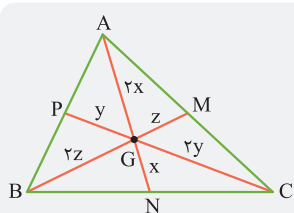
♦ **محاسبه طول DM و MI:** AE ، BC را نصف می‌کند؛ پس طبق مورد (۳) درس‌نامه باید $DM = MI = \frac{4}{2} = 2$ را هم که با BC موازی است، نصف کند، این یعنی

♦ **گام ۵ (افزودن پاره‌خط‌های مناسب به شکل):** مطابق شکل، از A ، I ، H و D به BC عمود می‌کشیم تا مستطیل‌های $DIH'H$ و $HGEP$ درست بشوند.



۲۶- گزینه ۴

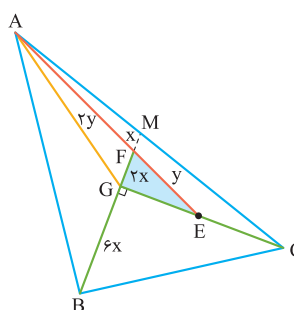
استراتژی اول نقش نقطه F را برای مثلث AGC تعیین می‌کنیم؛ بعد با توجه به این که میانه‌ها به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند، طول EF و GF را حساب می‌کنیم. با داشتن طول این دو پاره‌خط به راحتی می‌توانیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث رنگی، طول GE را حساب کنیم. در آخر با داشتن طول دو پاره‌خط GE و GF خواسته سؤال را به دست می‌آوریم.



درس‌نامه همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، میانه‌های هر مثلث در نقطه‌ای به اسم مرکز ثقل (G) هم‌رس‌اند. این میانه‌ها به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند؛ پس هم می‌توانیم طول قطعات روی میانه‌ها را به صورت پارامتری، روی شکل بالا بنویسیم؛ هم می‌توانیم بگوییم:

$$AG = 2GN, BG = 2GM, CG = 2GP$$

گام ۱ (تعیین نقش نقطه F برای مثلث AGC): به گفته سؤال نقطه G در شکل زیر، مرکز ثقل مثلث ABC است؛ پس طبق درس‌نامه می‌توانیم بگوییم BG قسمتی از میانه مثلث ABC است، پس اگر امتدادش بدهیم، می‌رود که ضلع AC را در نقطه M، نصف کند. از G به A وصل می‌کنیم تا مثلث AGC را بهتر ببینیم؛ همه حواستان به این مثلث باشد. به گفته سؤال E وسط ضلع GC است و دیدیم که M هم وسط ضلع AC شد؛ پس GM و AE میانه‌های مثلث AGC هستند که در نقطه F همدیگر را قطع می‌کنند. حالا طبق درس‌نامه می‌توانیم بگوییم نقطه F، مرکز ثقل مثلث AGC است.



گام ۲ (محاسبه طول GF و GE): طبق درس‌نامه، میانه‌های مثلث AGC در شکل مقابل، همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند؛ پس می‌توانیم طول قطعات روی آن‌ها را به صورت مقابل، روی شکل بنویسیم. از طرفی G هم، مرکز ثقل مثلث ABC است، پس طول BG، ۲ برابر GM می‌شود:

$$BG = 2GM \Rightarrow BG = 2(x + 2x) = 6x$$

سؤال می‌گوید $AE = 22/5$ و $BF = 18$ ، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} AE = 22/5 \Rightarrow 2y + y = 22/5 \Rightarrow 3y = 22/5 \Rightarrow y = 22/15 \\ BF = 18 \Rightarrow 6x + 2x = 18 \Rightarrow 8x = 18 \Rightarrow x = 9/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} EF = y = 22/15 \\ GF = 2x = 2 \times 9/4 = 9/2 \end{cases}$$

بنابراین طول EF و GF برابر می‌شود با:

گام ۳ (محاسبه طول GE): حالا که طول GF و EF را داریم، می‌توانیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث رنگی بالا، طول GE را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} GF^2 + GE^2 &= EF^2 \Rightarrow 4/5^2 + GE^2 = 22/15^2 \Rightarrow GE^2 = 22/15^2 - 4/5^2 \\ &= \frac{22^2 - 4^2}{15^2} = \frac{16}{15^2} \Rightarrow GE = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال): الان که طول اضلاع قائم مثلث رنگی را داریم، می‌توانیم مساحتش را به دست بیاوریم:

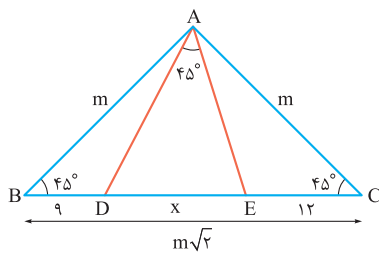
$$S_{GFE} = \frac{1}{2} GF \times GE = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{4}{15} = \frac{3}{5}$$

برابر می‌شود با:

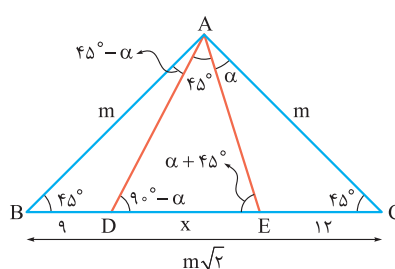
$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$

رو به α رو به β رو به θ

گام ۱ (تحلیل شکل مسئله): به گفته سؤال در شکل زیر $\hat{A} = 90^\circ$ و $AB = AC$ است؛ این یعنی مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است؛ بنابراین می‌توانیم



زاویه‌های B و C را با 45° و طول ساق‌های AB و AC را با m روی شکل نشان بدهیم. الان طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABC طول وتر BC می‌شود $m\sqrt{2}$. همین‌جا خواسته سؤال، یعنی طول پاره‌خط DE را هم x در نظر می‌گیریم.



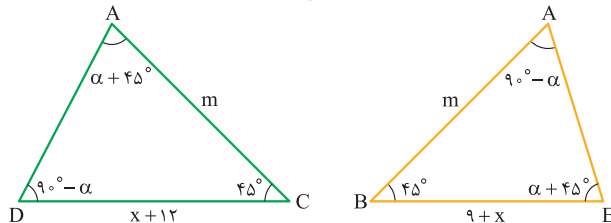
گام ۲ (تشخیص مثلث‌های متشابه): بیا باید فرض کنیم زاویه EAC در شکل مقابل برابر با α باشد، در این صورت زاویه BAD می‌شود:

$$\hat{BAD} = 90^\circ - (\hat{DAC}) = 90^\circ - (45^\circ + \alpha) = 45^\circ - \alpha$$

حالا خوب به زاویه‌های AED و ADE در شکل بالا نگاه کنید؛ این دو زاویه برای مثلث‌های AEC و ABD، یک زاویه خارجی هستند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{AED} = 45^\circ + \alpha, \quad \hat{ADE} = (45^\circ - \alpha) + 45^\circ = 90^\circ - \alpha$$

حالا مثلث‌های ADC و AEB را جداگانه می‌کشیم:



همان‌طور که می‌بینید، زاویه‌های این دو مثلث دقیقاً مثل هم‌اند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه این دو مثلث متشابه‌اند.

گام ۳ (نوشتن نسبت تشابه): حالا به کمک مورد (۳) درس‌نامه، نسبت تشابه مثلث‌های ADC و ABE را می‌نویسیم:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{BE} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{m}{9+x} = \frac{x+12}{m}$$

رو به $90^\circ - \alpha$ رو به $45^\circ + \alpha$

$$\Rightarrow m^2 = (x+12)(x+9) \Rightarrow m^2 = x^2 + 21x + 108 \quad (**)$$

گام ۴ (پیدا کردن دومین رابطه بین m و x): خوب به ضلع BC در شکلی که در اول گام (۲) کشیدیم نگاه کنید. طول این ضلع را مساوی جمع طول EC، DE، و BD می‌گذاریم:

$$\sqrt{2}m = 9 + x + 12 \Rightarrow \sqrt{2}m = x + 21$$

طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم تا $\sqrt{2}$ حذف شود:

$$(\sqrt{2}m)^2 = (x+21)^2 \Rightarrow 2m^2 = x^2 + 42x + 441 \quad (***)$$

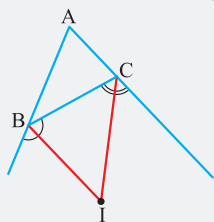
گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال): حالا رابطه (**) را در (**) جای‌گذاری می‌کنیم تا به یک معادله درجه ۲ بر حسب x برسیم:

$$\begin{aligned} 2(x^2 + 21x + 108) &= x^2 + 42x + 441 \\ \Rightarrow 2x^2 + 42x + 216 &= x^2 + 42x + 441 \Rightarrow x^2 = 225 = 15^2 \Rightarrow x = 15 \end{aligned}$$

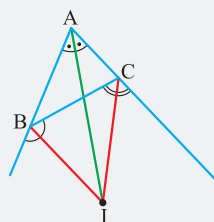
مشاوره سؤال واقعاً سختی بود، اگر نتوانستید حلش کنید اصلاً اشکالی ندارد. لطفاً پاسخ را خوب بخوانید تا اگر مشابه این سؤال را دیدید سورپرایز نشوید.

۲۷ - گزینه ۲

مثلاً در شکل زیر، زاویه بین دو نیمساز خارجی BI و CI می‌شود:

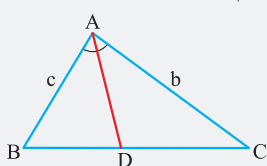


$$\hat{BIC} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$



۲) نیمسازهای دو زاویه خارجی مثلث، مثل BI و CI در شکل مقابل، همیشه روی نیمساز داخلی زاویه سوم، یعنی A، همدیگر را قطع می‌کنند.

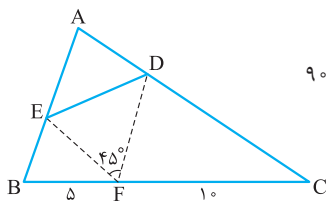
۳) نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع کناریش قطع می‌کند؛ این یعنی اگر در شکل زیر، AD نیمساز باشد، می‌توانیم بنویسیم:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

۴) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a = ck$ و $b = dk$ است. مثلاً:
 $\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow a = 3k, b = 5k$

۵) (تشخیص نوع مثلث ABC): همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، زاویه بین دو نیمساز خارجی EF و DF از مثلث AED شده 45° ؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:



$$90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = 45^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

پس مثلث ABC، قائم‌الزاویه است.
 ۶) (تعیین نقش AF برای مثلث ABC): حالا در شکل مقابل، خوب به نیمسازهای خارجی DF و EF از مثلث AED نگاه کنید. طبق مورد (۲) درس‌نامه، این دو نیمساز روی نیمساز داخلی زاویه سوم، یعنی A، همدیگر را قطع می‌کنند؛ بنابراین AF برای مثلث ABC نیمساز است.

۷) (محاسبه $\frac{AB}{AC}$): AF نیمساز مثلث ABC شد؛ پس طبق مورد (۳) درس‌نامه
 $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
 از تناسب بالا هم طبق مورد (۴) درس‌نامه، نتیجه می‌گیریم که: $AC = 2x$ و $AB = x$

۸) (تحلیل خواسته سؤال): سؤال مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC را می‌خواهد که می‌شود:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} (x)(2x) \Rightarrow S_{ABC} = x^2 \quad (*)$$

پس برای محاسبه خواسته سؤال باید x^2 را حساب کنیم.

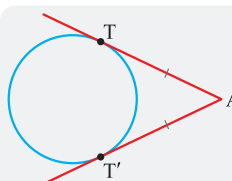
۹) (محاسبه خواسته سؤال): برای محاسبه x^2 در مثلث قائم‌الزاویه ABC، فیثاغورس می‌نویسیم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + (2x)^2 = (5+10)^2 \Rightarrow 5x^2 = 15 \times 15$$

$$\Rightarrow x^2 = 45$$

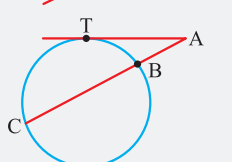
پس طبق رابطه (*)، مساحت مثلث ABC می‌شود ۴۵.

درس‌نامه ۱



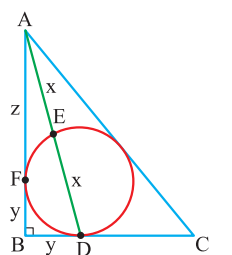
اگر از نقطه‌ای خارج دایره، مثل A در شکل مقابل، دو مماس بر دایره بکشیم، طولشان برابر است، یعنی:

$$AT = AT'$$



۲) در شکل مقابل، بین مماس AT و قطعاتی که روی امتداد وتر BC می‌سازد (AB و AC) رابطه زیر برقرار است:

$$AT^2 = AB \times AC$$



۳) (تحلیل شکل مسئله): به گفته سؤال $AE = AD$ است؛ پس طول جفتشان را روی شکل مقابل برابر x در نظر می‌گیریم. از نقطه F در خارج دایره مماس‌های BD و BF می‌گیریم. بر دایره رسم‌شده‌اند؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، می‌توانیم فرض کنیم $BD = BF = y$.

طول AF هم مطابق شکل بالا، Z می‌گذاریم.

۴) (پیدا کردن رابطه بین x و z): برای مماس AT در شکل بالا، طبق مورد (۲) درس‌نامه، می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$AF^2 = AE \times AD \Rightarrow z^2 = x(2x) \Rightarrow z = \sqrt{2}x \quad (1)$$

۵) (تحلیل خواسته سؤال): سؤال $\cos \hat{ADB}$ را می‌خواهد. این مقدار مثلث قائم‌الزاویه ABD برابر می‌شود با:

$$\cos \hat{ADB} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \cos \hat{ADB} = \frac{y}{\sqrt{2}x} \quad (*)$$

پس برای محاسبه خواسته سؤال باید نسبت $\frac{y}{x}$ را به دست بیاوریم.

۶) (محاسبه خواسته سؤال): در مثلث قائم‌الزاویه ABD، فیثاغورس می‌نویسیم:

$$AB^2 + BD^2 = AD^2 \Rightarrow (y+z)^2 + y^2 = (2x)^2$$

طبق رابطه (۱) به جای Z در تساوی بالا می‌توانیم بنویسیم $\sqrt{2}x$:

$$(y + \sqrt{2}x)^2 + y^2 = (2x)^2 \Rightarrow y^2 + 2\sqrt{2}xy + 2x^2 + y^2 = 4x^2 \Rightarrow 2y^2 + 2\sqrt{2}xy - 2x^2 = 0 \xrightarrow{+2} y^2 + \sqrt{2}xy - x^2 = 0$$

طرفین تساوی بالا را بر x^2 تقسیم می‌کنیم تا به یک معادله برحسب $\frac{y}{x}$ برسیم:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{\sqrt{2}xy}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0$$

جواب معادله بالا را هم به کمک Δ به دست می‌آوریم:

$$\frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2} \xrightarrow{\frac{y}{x} > 0} \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

حالا مقدار $\frac{y}{x}$ را در تساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم تا به خواسته سؤال برسیم:

$$\cos \hat{ADB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{4}{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

۲۸ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱

زاویه بین دو نیمساز خارجی مثلث، همیشه برابر است با:

$$90^\circ - \frac{\text{زاویه سوم}}{2}$$

۳۱- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ اگر دو ماتریس مربعی برابر باشند، دترمینان‌هایشان هم برابر خواهد بود، این یعنی هر وقت $A = B$ و A و B ماتریس‌های مربعی هستند) باشد، تساوی $|A| = |B|$ هم برقرار است. به عبارت دیگر از طرفین یک تساوی ماتریسی می‌توانیم دترمینان بگیریم (البته به شرطی که طرفین تساوی، ماتریس‌های مربعی باشند).

۲ دترمینان، عدد پشت ماتریس را به توان مرتبه همان ماتریس می‌رساند و پشت خودش منتقل می‌کند؛ این یعنی در دنیای دترمینان‌ها تساوی $|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}|$ همیشه برقرار است.

۳ وارون ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از این رابطه پیدا می‌شود:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۴ برای پیدا کردن ماتریس X از تساوی $AX = B$ ، کافی است طرفین تساوی را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنیم؛ ببینید:

$$AX = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

به همین ترتیب اگر $XA = B$ باشد هم می‌توانیم بگوییم $X = BA^{-1}$ است.

گام ۱ (محاسبه $|A|$ و خود A):

اول ضربی را که در سمت راست تساوی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $2A = \begin{bmatrix} |A| & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ هست، را انجام می‌دهیم:

$$2A = \begin{bmatrix} |A| & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| - 4 + 4 & 0 - 3 + 4 \\ 0 + 8 + 0 & 0 + 6 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} |A| & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

حالا طبق مورد (۱) درس‌نامه، می‌توانیم از طرفین تساوی $2A = \begin{bmatrix} |A| & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ ، دترمینان بگیریم:

$$|2A_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} |A| & 1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{طبق مورد (۲) درس‌نامه}} \frac{2^2 |A|}{|2A_{2 \times 2}| = 2^2 |A|} \rightarrow \frac{2^2}{4} |A| = 6|A| - 8$$

$$\Rightarrow 2|A| = 8 \Rightarrow |A| = 4$$

در ادامه $|A| = 4$ را در تساوی $2A = \begin{bmatrix} |A| & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ جای گذاری می‌کنیم تا خود ماتریس A هم به دست بیاید:

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): حالا که هم $|A|$ و هم خود A را داریم می‌توانیم با جای گذاری‌شان در تساوی $XA = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ 0 & 2|A| \end{bmatrix}$ ، ماتریس X را هم به دست بیاوریم:

$$XA = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ 0 & 2|A| \end{bmatrix} \Rightarrow X \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق مورد (۴) درس‌نامه}} X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

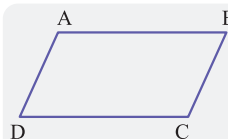
$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های سطر اول ماتریس X می‌شود $1 + 0.5 = 1.5$.

مشاوره در حل این جور سؤالات پرمحاسبه، باید حواستان باشد که اشتباه محاسباتی نداشته باشید.

۲۹- گزینه ۲



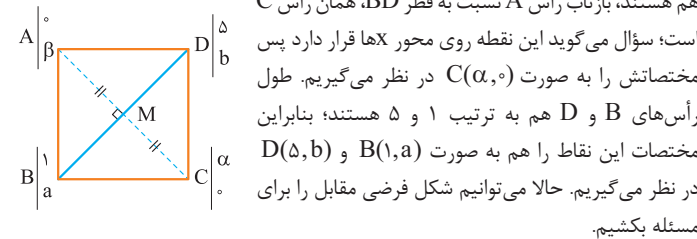
درس‌نامه اگر $ABCD$ در شکل مقابل یک متوازی‌الاضلاع باشد، رابطه زیر بین رئوسش برقرار است:

$$A + C = B + D$$

این رابطه برای خانواده متوازی‌الاضلاع، یعنی مربع، مستطیل و لوزی هم برقرار است.

شفاف‌سازی منظور از «بازتاب A نسبت به قطر BD »، همان رأس C است.

گام ۱ (رسم شکل و تحلیل آن): به گفته سؤال رأس A روی محور BD قرار دارد، پس می‌توانیم مختصاتش را به صورت $A(0, \beta)$ در نظر بگیریم. چون قطرهای لوزی، عمودمنصف هم هستند، بازتاب رأس A نسبت به قطر BD ، همان رأس C است؛ سؤال می‌گوید این نقطه روی محور BD قرار دارد پس مختصاتش را به صورت $C(\alpha, 0)$ در نظر می‌گیریم. طول رأس‌های B و D هم به ترتیب 1 و 5 هستند؛ بنابراین مختصات این نقاط را هم به صورت $B(1, a)$ و $D(5, b)$ در نظر می‌گیریم. حالا می‌توانیم شکل فرضی مقابل را برای مسئله بکشیم.



گام ۲ (پیدا کردن خواسته سؤال): چهارضلعی $ABCD$ در شکل بالا لوزی است، پس طبق درس‌نامه می‌توانیم رابطه زیر را برای رئوسش بنویسیم:

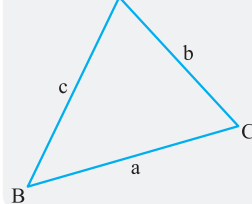
$$A + C = B + D \Rightarrow (0, \beta) + (\alpha, 0) = (1, a) + (5, b)$$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) = (6, a+b) \Rightarrow \alpha = 6$$

بنابراین طول رأس C برابر $\alpha = 6$ است.

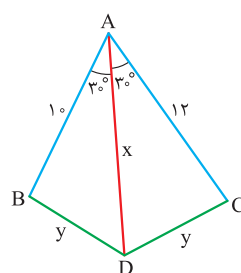
۳۰- گزینه ۱

درس‌نامه طبق قضیه کسینوس‌ها، بین طول اضلاع و کسینوس زاویه‌های مثلث مقابل، رابطه‌های زیر برقرارند:



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{aligned}$$

گام ۱ (تحلیل شکل مسئله): به گفته سؤال BD و DC برابرند، به همین خاطر مطابق شکل طول جفتشان را y در نظر گرفتیم. خواسته سؤال، یعنی طول AD را هم x فرض می‌کنیم.



گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): حالا به کمک درس‌نامه، در مثلث‌های ADC و ABD قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \Delta ADC: y^2 = x^2 + 12^2 - 2(x)(12) \cos 30^\circ \\ \Delta ABD: y^2 = x^2 + 10^2 - 2(x)(10) \cos 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 + 144 - 12\sqrt{3}x \\ y^2 = x^2 + 100 - 10\sqrt{3}x \end{cases}$$

سمت چپ تساوی‌های بالا برابرند؛ پس سمت راستشان را هم برابر می‌گذاریم:

$$x^2 + 144 - 12\sqrt{3}x = x^2 + 100 - 10\sqrt{3}x \Rightarrow 2\sqrt{3}x = 44$$

$$\Rightarrow x = \frac{44}{2\sqrt{3}} = \frac{22}{\sqrt{3}}$$

چون بقیه درایه‌های قطر اصلی مساوی همان d_{11} و درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی همگی صفرند. به ازای $x=1$ و $y=2$ و d_{11} را حساب می‌کنیم:

$$d_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3-2x & y & 3+x \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix} = 14 - 12 - 40 = -38$$

$$D = \begin{bmatrix} -38 & 0 & 0 \\ 0 & -38 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس D به این صورت می‌شود:

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): حالا چیزهایی را که به دست آوردیم، در

$$[x \ 1 \ y] D \begin{bmatrix} x \\ -x \\ y \\ 2 \end{bmatrix}$$

جای گذاری می‌کنیم تا به خواسته سؤال برسیم:

$$[1 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} -38 & 0 & 0 \\ 0 & -38 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [-38 \ -38 \ -76] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -38 + 38 - 76 = -76$$

درس‌نامه ۱ اگر دایره $C(O, r)$ از نقطه O' بگذرد، آن‌گاه $OO' = r$.

۲ اگر دایره‌ای از دو نقطه A و B بگذرد، مرکز آن روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۳ با معلوم‌بودن مختصات دو نقطه A و B ، می‌توانیم معادله عمودمنصف AB را بنویسیم. عمودمنصف AB ، خطی است که از نقطه وسط AB می‌گذرد و شیب آن قرینه معکوس شیب AB است (یادتان باشد که اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیبشان (-1) می‌شود).

۴ معادله گسترده هر دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. برای به دست آوردن شعاع و مرکز دایره در این معادله، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$O\left(-\frac{\text{ضریب } x}{2}, -\frac{\text{ضریب } y}{2}\right), \quad r = \sqrt{c - \left(\frac{\text{عرض مرکز}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{طول مرکز}}{2}\right)^2}$$

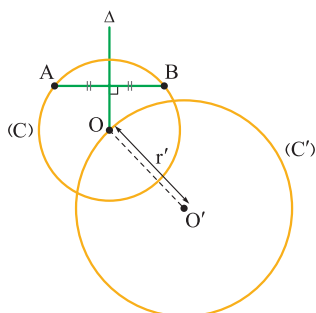
↓
عدد ثابت
معادله گسترده

فقط حواستان باشد، زمانی می‌توانید از رابطه‌های بالا استفاده کنید که ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ و عدد ثابت، سمت چپ معادله گسترده باشد. اگر معادله گسترده این شکلی نبود، باید چنین شرایطی را خودتان بسازید.

گام ۳ (تحلیل سؤال و رسم شکل فرضی): با توجه به شکل، اگر O مرکز دایره C باشد، آن‌گاه:

(۱) O روی عمودمنصف AB واقع است (طبق مورد (۲) درس‌نامه).

(۲) فاصله O از مرکز دایره C' برابر با شعاع دایره C' است.



درس‌نامه ۱ در دنیای ماتریس‌ها، ترتیب ضرب کردن مهم است؛ بنابراین برای محاسبه ضربی مثل ABC دو راه داریم:

(الف) اول AB را حساب کنیم؛ بعد حاصلش را از سمت راست در C ضرب کنیم:

$$ABC = (AB) \times C$$

(ب) اول BC را حساب کنیم؛ بعد A را از سمت چپ در حاصلش ضرب کنیم:

$$ABC = A \times (BC)$$

۲ هر وقت تمام درایه‌های حاصل از ضرب دو ماتریس مثل A و B را نمی‌خواستید و هدفتان پیدا کردن یک سطر یا ستون یا درایه‌ای خاص بود از رابطه‌های زیر استفاده کنید:

$$A \times B = [\text{سطر } i \text{ از ماتریس } A] \times [\text{سطر } i \text{ از ماتریس } B]$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} \text{ستون } j \text{ از ماتریس } A \\ \text{ستون } j \text{ از ماتریس } B \end{bmatrix}$$

$$A \times B = [\text{ستون } i \text{ از ماتریس } A] \times [\text{ستون } i \text{ از ماتریس } B]$$

گام ۳ (محاسبه درایه‌های AB): اول درایه‌های ماتریس AB را به دست می‌آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ -1 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & y & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2x & y & 3+x \\ 4x & xy-x & 3x+xy \\ x & -y-x & xy-3 \end{bmatrix}$$

گام ۳ (اعمال شرط اسکالر بودن): الان بیا باید یک نمای کلی از ماتریس D ببینیم:

$$D = (AB)C = \begin{bmatrix} 3-2x & y & 3+x \\ 4x & xy-x & 3x+xy \\ x-3 & -y-x & xy-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & -10 & 6 \\ -6 & 7 & 11 \\ -10 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

$$= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} (*)$$

اگر قرار باشد ماتریس D اسکالر باشد، یکی از شرط‌های صفر بودن d_{12} و d_{13} است. اول این دو شرط را اعمال می‌کنیم:

$$d_{12} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-2x & y & 3+x \\ 4x & xy-x & 3x+xy \\ x-3 & -y-x & xy-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{-10(3-2x)}_{-30+20x} + 7y - (3+x) = 0 \Rightarrow 19x + 7y = 33 \quad (1)$$

$$d_{13} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-2x & y & 3+x \\ 4x & xy-x & 3x+xy \\ x-3 & -y-x & xy-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{6(3-2x)}_{18-12x} + \underbrace{11y - 7(3+x)}_{-21-7x} = 0 \Rightarrow -19x + 11y = 3 \quad (2)$$

با معادله‌های (۱) و (۲) دستگاه زیر را می‌سازیم تا با حلش به x و y برسیم:

$$\begin{cases} 19x + 7y = 33 \\ -19x + 11y = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 18y = 36 \Rightarrow y = 2$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در بالایی}} 19x + 14 = 33 \Rightarrow x = 1$$

همان‌طور که می‌بینید با اعمال همین دو شرط x و y را به دست آوردیم؛ پس دیگر با بقیه شرط‌های اسکالر بودن کاری نداریم.

گام ۳ (محاسبه درایه‌های D): حالا خوب به رابطه (*) در گام قبل نگاه کنید. برای محاسبه

درایه‌های ماتریس اسکالر D فقط یکی از درایه‌های قطر اصلی‌اش مثل d_{11} را لازم داریم،

گام ۱ (نوشتن معادله عمودمنصف AB): اگر M وسط پاره خط AB باشد، آن گاه:

$$M = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}((-1, 4) + (2, 2)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

از طرفی شیب خط AB برابر با $m_{AB} = \frac{4-2}{-1-2} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$ است، پس شیب عمودمنصف می‌شود $m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{3}{2}$ ؛ پس معادله عمودمنصف به این صورت است:

$$y - y_M = m_{\Delta}(x - x_M) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Delta: y = 3x + 2$$

چون $O(\alpha, 3\alpha + 2)$ واقع است، می‌توانیم مختصات آن را به صورت $O(\alpha, 3\alpha + 2)$ در نظر بگیریم.

گام ۲ (پیدا کردن مرکز و شعاع دایره C'): معادله دایره C' به صورت $C': x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ داده شده است، پس اگر مرکز آن را O' و شعاع آن را r' بنامیم، داریم: (طبق مورد (۴) درس‌نامه)

$$O' \left(\begin{array}{l} -\frac{-4}{2} = 2 \\ -\frac{-4}{2} = 2 \end{array} \right), r' = \sqrt{2^2 + 2^2 - 4/4} = \sqrt{3/6}$$

از مرکز دایره C' برابر با r' است، یعنی $OO' = r'$. حالا با در نظر گرفتن $O'(\alpha, 3\alpha + 2)$ و $O(\alpha, 3\alpha + 2)$ داریم:

$$OO' = r' \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (3\alpha + 2 - 2)^2} = \sqrt{3/6}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (\alpha - 2)^2 + (3\alpha)^2 = 3/6 \Rightarrow 10\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 3/6$$

$$\Rightarrow 10\alpha^2 - 4\alpha + 0/4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(10)(0/4)}}{2(10)} = \frac{4 \pm 0}{20} = \frac{1}{5} = 0/2$$

اگر $\alpha = 0/2$ آن گاه مختصات O به دست می‌آید: $O(\alpha, 3\alpha + 2) = (0/2, 2/6)$ بنابراین عرض مرکز دایره C برابر ۲/۶ است.

۳۴ - گزینه ۲

درس‌نامه ۱ ضرب داخلی و خارجی دو بردار مثل $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

خواص این متغیر باشد.

۲ اندازه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

۳ بردارهای $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به شرطی موازی‌اند که تناسب زیر برقرار باشد:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

۴ در شکل مقابل با بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ یک متوازی‌السطوح ساخته‌ایم. همان‌طور که می‌بینید $\vec{h}$ ، بردار ارتفاع وارد بر قاعده $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. در مورد این متوازی‌السطوح باید سه نکته زیر را بلد باشید:

(الف) $\vec{h} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$

(ب) $\vec{c} \cdot \vec{h} = |\vec{h}|^2$

(پ) حجم این متوازی‌السطوح از رابطه زیر، محاسبه می‌شود:

$$V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$

گام ۱ (محاسبه $|\vec{h}|$): اول به کمک مورد (۱) درس‌نامه، $\vec{a} \times \vec{b}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a} = (1, 2, 0) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1)$$

طبق مورد (۴ - الف) درس‌نامه، بردارهای $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 1, -1)$ و $\vec{h} = (n, -2, p)$ موازی‌اند، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{n}{-2} = \frac{-2}{1} = \frac{p}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{-2} = \frac{-2}{1} \Rightarrow n = 4 \\ \frac{-2}{1} = \frac{p}{-1} \Rightarrow p = 2 \end{cases}$$

پس بردار $\vec{h}$ به این صورت شد:

$$|\vec{h}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24}$$

بنابراین اندازه‌اش برابر می‌شود با:

گام ۲ (به دست آوردن m): در قسمت (۴ - ب) درس‌نامه گفتیم رابطه $\vec{c} \cdot \vec{h} = |\vec{h}|^2$ برقرار است:

$$(m, -m, m) \cdot (4, -2, 2) = (\sqrt{24})^2 \Rightarrow 4m + 2m + 2m = 24$$

$$\Rightarrow 8m = 24 \Rightarrow m = 3$$

بنابراین بردار $\vec{c}$ هم به این صورت می‌شود:

$$\vec{c} = (3, -3, 3)$$

گام ۳ (به دست آوردن حجم متوازی‌السطوح): حالا که بردارهای $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{c}$ را داریم، می‌توانیم حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود را به کمک مورد (۴ - پ) درس‌نامه به دست بیاوریم:

$$V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = |(3, -3, 3) \cdot (-2, 1, -1)| = |-6 - 3 - 3| = 12$$

۳۵ - گزینه ۴

گام ۱ وقتی صحیح می‌شود که صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد، پس باید $x - 3 \mid 5x + 2$.

نکته در معادله‌های عادی به فرم $ax + b \mid f(x)$ ، می‌توانیم ریشه عبارت خطی، یعنی $x = -\frac{b}{a}$ را در سمت راست معادله جای‌گذاری کنیم:

$$ax + b \mid f(x) \Rightarrow ax + b \mid f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

گام ۲ حالا طبق نکته بالا داریم:

$$x - 3 \mid \frac{5(x-3) + 2}{17} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4 \\ x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2 \\ x - 3 = 17 \Rightarrow x = 20 \\ x - 3 = -17 \Rightarrow x = -14 \end{cases}$$

پس چهار نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.

۳۶ - گزینه ۲

درس‌نامه ۱ در نظریه اعداد منظور از $\overline{abc}$ یک عدد سه‌رقمی است که رقم یکانش c، دهگان‌ش b و صدگان‌ش a است. این عدد را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\overline{abc} = 10^2 a + 10b + c, (0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9)$$

۲ در بسط‌دادن اعداد، هر وقت واحد تکرار شونده دیدید عدد را برحسب همان واحد بسط دهید؛ مثلاً عدد $\overline{abab}$ را برحسب واحد تکرار شونده‌اش، یعنی $\overline{ab}$ بسط می‌دهیم:

$$\overline{abab} = 10 \cdot \overline{ab} + \overline{ab} = 10 \cdot 10 \overline{ab} + \overline{ab}$$

۳ اگر a بر b بخش‌پذیر باشد؛ می‌توانیم بگوییم $a \equiv 0$ است.

گام ۱ اگر عدد $\overline{aa}$ را در سمت چپ $\overline{bb}$ قرار بدهیم به عدد $\overline{aabb}$ می‌رسیم. به گفته

سؤال این عدد با مجموع مربعات دو عدد $\overline{aa}$ و $\overline{bb}$ برابر است؛ پس باید بنویسیم:

$$\overline{aabb} = (\overline{aa})^2 + (\overline{bb})^2$$

گام ۱ سؤال جواب‌های طبیعی معادله را می‌خواهد، پس نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow 22k > 0 \Rightarrow k > 0 \\ y > 0 \Rightarrow 69 - 22k > 0 \Rightarrow 22k < 69 \Rightarrow k < 3 \end{cases}$$

اشتراک $\rightarrow 0 < k < 3 \Rightarrow k = 1, 2$

بنابراین معادله دوتا جواب طبیعی دارد.



۳۸- گزینه ۱

درس‌نامه در هر گراف کامل p رأسی مثل G ، اگر درجهٔ بزرگ‌ترین رأس را با $\Delta(G)$ ، درجهٔ کوچک‌ترین رأس را با $\delta(G)$ و تعداد یال‌ها را با $q(G)$ نمایش دهیم، داریم:

$$\Delta(G) = \delta(G) = p-1, \quad q(G) = \frac{p(p-1)}{2}$$

گام ۱ طبق درس‌نامه، در هر گراف کامل، $\Delta = \delta = p-1$ و تعداد یال‌ها برابر $\frac{p(p-1)}{2}$ است. این موارد را در تساوی صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{p(p-1)}{2} = (p-1)^2 - 4(p-1) = (p-1)(p-1-4)$$

گام ۲ $p-1 \neq 0$ است، چون اگر $p=1$ باشد، $q=0$ و در نتیجه گراف تهی می‌شود که با فرض سؤال تناقض دارد. بنابراین حق داریم $(p-1)$ ها را از طرفین تساوی بالا ساده کنیم:

$$\frac{p}{2} = p-5 \Rightarrow p = 2p-10 \Rightarrow p = 10$$



۳۹- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ هر وقت درجهٔ رأس‌های یک گراف را داشتید و اندازهٔ گراف را می‌خواستید از رابطهٔ مقابل استفاده کنید:

$$\Delta(G) = G \text{ بزرگ‌ترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف}$$

۲ فرض کنید G یک گراف از مرتبهٔ p و a یک رأس آن باشد، در این صورت بین درجهٔ رأس a در G و $\bar{G}$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\text{رأس } a \text{ در } G = p-1$$

۳ تعداد رأس‌های فرد هر گراف، همیشه عددی زوج است.

۴ درجهٔ رأس‌های یک گراف ساده از مرتبهٔ p ، همیشه کوچک‌تر مساوی « $p-1$ » است.

گام ۱ اول ۱۳۵ را تجزیه می‌کنیم:

$$135 = 5 \times 3 \times 3 \times 3$$

اگر ۳، ۳، ۳ و ۵ را به عنوان درجهٔ رأس‌ها در نظر بگیریم، $p = 4$ می‌شود؛ پس طبق مورد (۵) درس‌نامه درجهٔ هر رأس حداکثر می‌تواند $4-1=3$ باشد. اما همان‌طور که می‌بینید در این دنباله، رأس با درجهٔ ۵ داریم، پس ۳، ۳، ۳ و ۵ نمی‌توانند درجهٔ رأس‌ها باشند.

گام ۲ برای برطرف‌شدن مشکل‌مان، دوتا ۱ به درجه‌های ۳، ۳، ۳، ۵ اضافه می‌کنیم تا به درجه‌های مقابل برسیم:

الان هم تعداد درجه‌های فرد عددی زوج است و هم $p(G)$ (مرتبه) حداقل. پس اعداد بالا را به عنوان درجهٔ رأس‌های گراف G در نظر می‌گیریم.

گام ۳ حالا $\Delta(\bar{G})$ و $q(\bar{G})$ را به دست می‌آوریم. در دنبالهٔ ۱، ۱، ۳، ۳، ۳ و ۵ چون ۶ عدد داریم، پس ۶ تا هم رأس داریم؛ بنابراین $p = 6$ است. حالا طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم برای به دست آوردن درجهٔ رأس‌های گراف $\bar{G}$ ، باید همهٔ درجه‌ها را از $p-1=5$ کم کنیم:

$$\bar{G} \text{ درجهٔ رأس‌های } 5-5, 5-3, 5-3, 5-3, 5-1, 5-1$$

همان‌طور که می‌بینید؛ $\Delta(\bar{G}) = 4$ است. برای محاسبهٔ $q(\bar{G})$ هم از مورد (۱) درس‌نامه کمک می‌گیریم:

$$\bar{G} \Rightarrow \text{اندازهٔ گراف } \bar{G} \times 2 = \text{مجموع درجه‌های گراف } \bar{G} \Rightarrow 14 = 2q(\bar{G}) \Rightarrow q(\bar{G}) = 7$$

بنابراین $\frac{q(\bar{G})}{\Delta(\bar{G})}$ برابر می‌شود با:

$$\frac{q(\bar{G})}{\Delta(\bar{G})} = \frac{7}{4} = \frac{8-1}{4} = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$$

گام ۲ حالا اعداد تساوی قبلی را به کمک چیزهایی که در درس‌نامه گفتیم بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} 100aa + bb &= (10a+a)^2 + (10b+b)^2 \\ &\Rightarrow 100(10a+a) + (10b+b) = 11^2a^2 + 11^2b^2 \Rightarrow 100(11a) + 11b = 11^2a^2 + 11^2b^2 \\ &\xrightarrow{\div 11} 100a + b = 11(a^2 + b^2) \quad (*) \end{aligned}$$

گام ۳ سمت راست تساوی بالا بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس سمت چپش هم باید بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$100a + b \equiv 0 \Rightarrow a + b \equiv 0$$

همنهشتی بالا می‌گوید $a+b$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. با توجه به این که $1 \leq a \leq 9$ و $0 \leq b \leq 9$ است، پس $1 \leq a+b \leq 18$ می‌شود. تنها عددی که در این بازه بر ۱۱ بخش‌پذیر است؛ خود عدد ۱۱ است، پس:

گام ۴ حالا در تساوی (*) یک « $a+b$ » می‌سازیم تا بتوانیم به جایش بنویسیم ۱۱ (طبق رابطهٔ (**)) حق داریم این کار را انجام بدهیم:

$$\begin{aligned} 100a + b &= 11(a^2 + b^2) \Rightarrow 9a + (a+b) = 11(a^2 + b^2) \Rightarrow 9a + 1 = a^2 + b^2 \\ &\text{طبق رابطهٔ (***) می‌توانیم به جای } b \text{ در تساوی بالا } 11-a \text{ را جای‌گذاری کنیم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9a + 1 &= a^2 + (11-a)^2 \Rightarrow 9a + 1 = a^2 + a^2 - 22a + 121 \Rightarrow 2a^2 - 31a + 120 = 0 \\ &\Rightarrow a = \frac{31 \pm \sqrt{(31)^2 - 4(2)(120)}}{2(2)} = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 960}}{4} = \frac{31 \pm 1}{4} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = \frac{31+1}{4} = 8$$

در ادامه $a=8$ را در $a+b=11$ جای‌گذاری می‌کنیم تا b هم به دست بیاید:

$$8 + b = 11 \Rightarrow b = 3$$

گام ۵ حالا می‌توانیم بگوییم $\overline{ab} = 83$ است. نزدیک‌ترین مربع کامل به این عدد، ۸۱ است، پس $\overline{ab}$ حداقل ۲ واحد از مربع کامل فاصله دارد.



۳۷- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ به معادله‌هایی به شکل $ax + by = c$ (a, b و c اعدادی صحیح‌اند) معادلهٔ سیالهٔ خطی می‌گوییم. برای حل کردن این معادله‌ها کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

(الف) طرفین معادله را به پیمانهٔ ضریب کوچک‌تر (یا a یا b) همنهشت قرار می‌دهیم تا به یک معادلهٔ همنهشتی برسیم.

(ب) با حل معادلهٔ همنهشتی، فرم کلی یکی از مجهول‌ها را به دست می‌آوریم.

(پ) مجهول به‌دست‌آمده را در معادلهٔ سیاله جای‌گذاری می‌کنیم تا مجهول دیگر هم به دست بیاید.

۲ اگر طرفین یک همنهشتی به پیمانهٔ m ، بر عدد صحیحی مثل $a \neq 0$ بخش‌پذیر باشند، می‌توانیم a را از طرفین همنهشتی ساده کنیم؛ اما باید حواسمان باشد که پیمانه را هم بر (a, m) تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$\frac{m}{d} \quad ax \equiv ay \xrightarrow{\div a \text{ (a,m)=d}} x \equiv y$$

۳ هر همنهشتی مثل $a \equiv b$ را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم؛ ببینید:

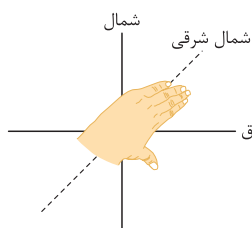
$$a \equiv b \Leftrightarrow a = mk + b$$

گام ۱ طبق مورد (۱) درس‌نامه، طرفین معادله را به پیمانهٔ ضریب کوچک‌تر، یعنی ۲۲ همنهشت قرار می‌دهیم:

$$22x + 22y \equiv 1518 \Rightarrow 22x \equiv 0 \xrightarrow{\div 22 \text{ (22,22)=1}} x \equiv 0 \Rightarrow x = 22k$$

گام ۲ $x = 22k$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$22(22k) + 22y = 1518 \xrightarrow{\div 22} 22k + y = 69 \Rightarrow y = 69 - 22k$$



بار الکتریکی الکترون منفی است؛ پس می‌توانیم از دست چپ کمک بگیریم. به این صورت که اگر چهار انگشت باز شده دست چپ خود را در جهت حرکت الکترون (شمال شرقی) قرار دهیم، به طوری که وقتی چهار انگشت خود را خم می‌کنیم، در جهت میدان مغناطیسی (شمال) قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شست دست چپ ما، جهت نیروی مغناطیسی (پایین) را نشان می‌دهد.

تله در این جور سؤال‌ها، حواستان باشد که بار الکتریکی ذره مثبت است یا منفی! مثلاً اگر در این سؤال به منفی بودن بار الکتریکی الکترون توجه نکنید، به ❶ می‌رسید!

گزینه ۴ - ۴۳

باید هر یک از کمیت‌های داده‌شده در گزینه‌ها را براساس روابط فیزیکی که بلدیم، بنویسیم تا در نهایت یکای کمیت برحسب یکاهای اصلی به دست آید. با انجام این کار می‌بینیم که یکای داده‌شده در صورت سؤال، یکای مقاومت الکتریکی است، زیرا:

$$R = \frac{V}{I} \xrightarrow{V = \frac{\Delta U}{q}} R = \frac{\Delta U}{Iq} \xrightarrow{\Delta U = \frac{1}{2}mv^2, q = It} R = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{I^2t}$$

$$\Rightarrow R_{\text{یکای}} = \frac{m_{\text{یکای}} \times (v_{\text{یکای}})^2}{(I_{\text{یکای}})^2 \times t_{\text{یکای}}} = \frac{\text{kg} \cdot (\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}$$

گزینه ۳ - ۴۴

درس‌نامه ۱ معادله ریدبرگ، طول موج خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > n', \text{ ثابت ریدبرگ و } R \approx 1.097 \times 10^7 \text{ nm}^{-1})$$

شماره رشته

♦ در این رابطه، طول موج (λ) برحسب نانومتر است.
♦ شماره و نام رشته‌ها به صورت جدول زیر است:

شماره رشته (n')	۱	۲	۳	۴	۵
نام رشته	لیمان	بالمر	پاشن	براکت	پفوند

۲ طول موج آستانه برای پدیده فوتوالکتریک:

بیشترین طول موج فوتون فرودی که باعث رخ‌دادن پدیده فوتوالکتریک می‌شود.

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_0}$$

تابع کار فلز →

(J.s) $h = 6.6 \times 10^{-34}$ ؛ ثابت پلانک و $c = 3 \times 10^8$ m/s: تندی نور در خلأ)

گام ۱ طول موج آستانه فلز را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2/3 \times 10^{-19}} = 6.6 \times 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow \lambda_0 = 660 \text{ nm}$$

گام ۲ حالا باید ببینیم که کدام طول موج از تابش‌های اتم هیدروژن برابر 660 nm کمتر از آن است. واضح است که این طول موج در محدوده نور مرئی و مربوط به رشته بالمر یعنی $n' = 2$ است؛ پس به کمک رابطه ریدبرگ داریم:

$$\lambda \leq 660 \text{ nm} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{660} \Rightarrow R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \geq \frac{1}{660}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{660} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \geq \frac{1}{660} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{660}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{660} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{135 - 100}{660} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{35}{660}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{7}{132} \Rightarrow n^2 \geq \frac{132}{7} \Rightarrow n^2 \geq 19 \Rightarrow n \geq 4$$

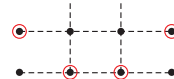
کم‌ترین مقدار قابل قبول برای n برابر ۴ است.

گزینه ۳ - ۴۵

درس‌نامه در مسائل اصل لانه‌کبوتری وقتی می‌خواهیم مطمئن باشیم اتفاق خاصی رخ می‌دهد، بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم و تا آخرین نفس با سؤال لج می‌کنیم.

گام ۱ بدترین حالت ممکن این است که تا جای ممکن نقطه‌هایی را انتخاب کنیم که هیچ سه‌تایی از آن‌ها روی یک خط راست نباشند.

گام ۲ به همین خاطر مطابق شکل مقابل، از هر ضلع مربع بزرگ ۲ تا نقطه برمی‌داریم.



گام ۳ تا این‌جا ۸ نقطه انتخاب کردیم ولی هیچ سه‌تایی از آن‌ها یک خط راست نیستند، اما به محض این‌که نهمی را برداریم، خواسته سؤال برآورده می‌شود؛ پس حداقل ۹ تا نقطه باید انتخاب کنیم.

فیزیک

گزینه ۴ - ۴۱

شفاف‌سازی موج عرضی یعنی موجی که راستای نوسان هر جزء از محیط بر راستای انتشار موج عمود باشد.

اگر راستای نوسان هر جزء از محیط (مانند فنر) با راستای انتشار موج یکسان باشد، به آن موج، موج طولی و اگر راستای نوسان هر جزء از محیط (مانند فنر) بر راستای انتشار موج عمود باشد، به آن موج، موج عرضی می‌گویند. حالا عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

(الف) هنگام انتشار موج صوتی در یک محیط، راستای نوسان ذرات محیط با راستای انتشار صوت، یکسان است؛ بنابراین موج صوتی، موج طولی است.

(ب) امواج رادیویی، جزئی از طیف امواج الکترومغناطیسی هستند. در امواج الکترومغناطیسی، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی همواره بر جهت انتشار موج عمودند و در نتیجه موج الکترومغناطیسی، یک موج عرضی است.

(پ و ت) امواج لرزه‌ای، موج‌های مکانیکی‌ای هستند که از لایه‌های زمین عبور می‌کنند. دو نوع از امواج لرزه‌ای امواج اولیه P و امواج ثانویه S هستند. امواج P، امواجی طولی (نادرستی (پ)) و امواج S، امواجی عرضی (درستی (ت)) هستند.

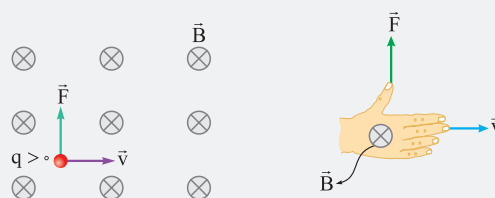
مشاوره در این جور سؤال‌ها، ابتدا سراغ عبارتی بروید که بلد هستید و گزینه‌های نادرست را حذف کنید.

گزینه ۲ - ۴۲

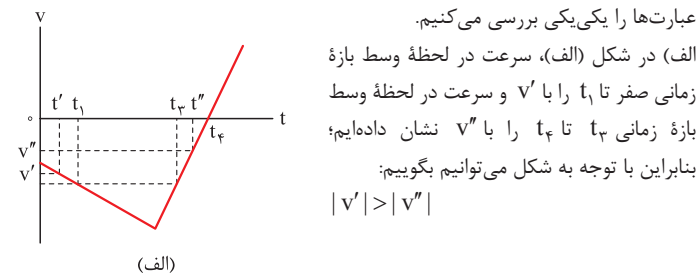
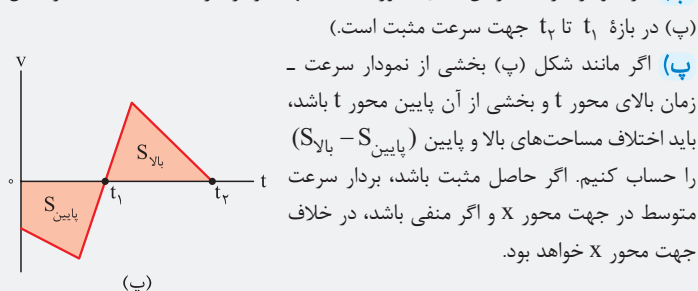
درس‌نامه قاعده دست راست برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک:

اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت $\vec{v}$ باشد، به گونه‌ای که وقتی آن‌ها را روی زاویه کوچک‌تری که $\vec{v}$ با $\vec{B}$ می‌سازد و در جهت چرخش طبیعی انگشتان خم کنیم، در جهت $\vec{B}$ قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذره باردار مثبت خواهد بود. برای تعیین جهت $\vec{F}$ برای بار منفی می‌توانید دو کار انجام دهید:

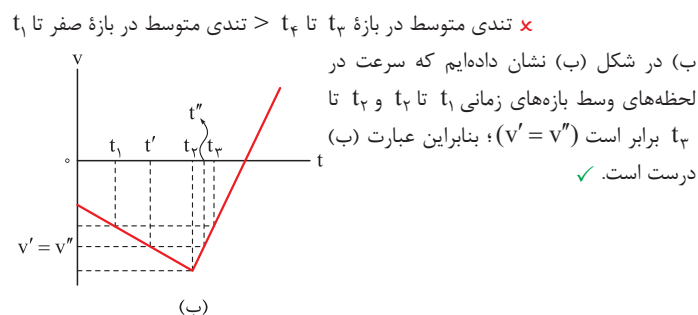
♦ جهت نیروی وارد بر بار مثبت را به دست آورید، سپس آن را برعکس کنید.
♦ قاعده دست راست را به کمک دست چپ انجام دهید.



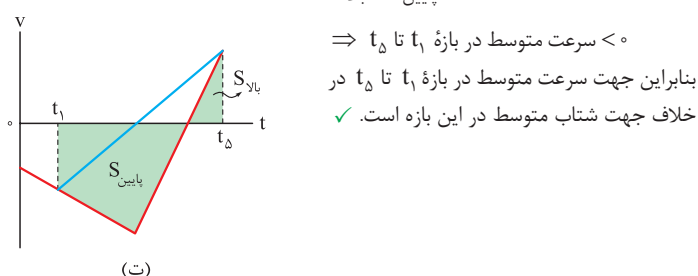
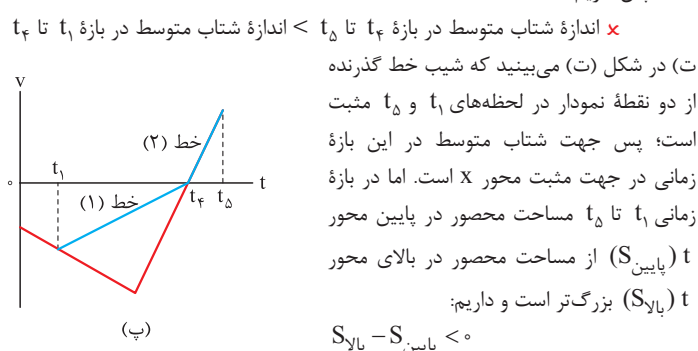
۳ الف) اگر نمودار سرعت - زمان یک متحرک زیر محور t باشد، جهت بردار سرعت منفی است. (در شکل (پ) در بازه صفر تا t_1 جهت سرعت منفی است.)
ب) اگر نمودار سرعت - زمان بالای محور t باشد، جهت بردار سرعت مثبت است. (در شکل (پ) در بازه t_1 تا t_2 جهت سرعت مثبت است.)



اندازه سرعت متوسط در بازه t_1 تا t_2 $>$ اندازه سرعت متوسط در بازه صفر تا t_1 $\Rightarrow$ از آنجایی که نمودار سرعت - زمان، در بازه زمانی صفر تا t_1 زیر محور قرار دارد، پس متحرک در این بازه تغییر جهت نداده و در نتیجه تندی متوسط در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_1 تا t_2 برابر اندازه سرعت متوسط در این بازه‌ها است و داریم:



پ) بردار سرعت متحرک در لحظه t_4 تغییر جهت داده است. برای همین ما در شکل (پ) خط گذرنده از دو نقطه نمودار در لحظه‌های t_1 و t_4 و همچنین خط گذرنده از دو نقطه نمودار در لحظه‌های t_4 و t_5 را رسم کرده‌ایم. واضح است که شیب خط (۱) از شیب خط (۲) کم‌تر است؛ پس داریم:



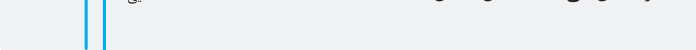
گام ۳ طول موج مربوط به گذار الکترون از تراز $n = 4$ به تراز $n' = 2$ را محاسبه می‌کنیم:
 $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = \frac{1}{100} \times \left(\frac{4-1}{16} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{1600}{3} \text{ nm}$

۴۵ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ قانون لنز: با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه (یا پیچ) یا سیم‌لوله، میدان مغناطیسی القایی در داخل حلقه به وجود می‌آید که جهت آن طبق جدول زیر تعیین می‌شود:

جهت تغییر شار مغناطیسی	جهت میدان مغناطیسی القایی
افزایش	در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی
کاهش	هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی

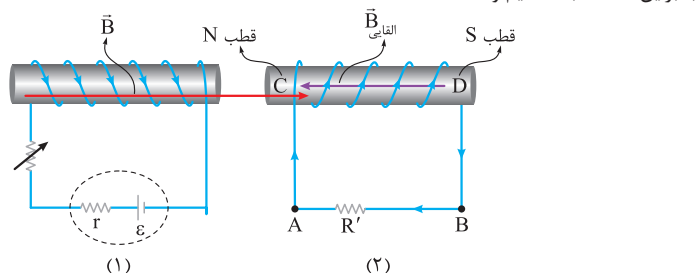
۲ قاعده دست راست برای تعیین جهت جریان القایی: اگر چهار انگشت دست راست را در جهت میدان مغناطیسی در داخل حلقه قرار دهیم، شست دست جهت جریان القایی در حلقه را نشان می‌دهد (شکل مقابل):



گام ۴ در شکل زیر جریان عبوری از سیم‌لوله (۱) و به کمک قاعده دست راست جهت میدان مغناطیسی این سیم‌لوله ($\vec{B}$) را نشان داده‌ایم. با کاهش مقاومت رنوستا، جریان عبوری از سیم‌لوله (۱) و در نتیجه اندازه $\vec{B}$ و شار مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله (۲) افزایش می‌یابد. طبق قانون لنز برای جلوگیری از این افزایش شار، میدان مغناطیسی القایی در سیم‌لوله (۲) ($\vec{B}_{\text{القایی}}$) در خلاف جهت $\vec{B}$ یعنی به طرف چپ است.

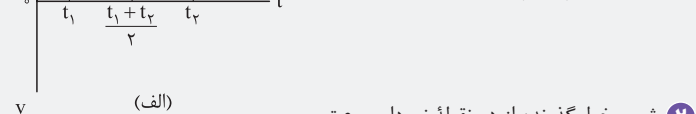
گام ۵ حالا اگر دوباره از قاعده دست راست کمک بگیریم، جریان القایی در سیم‌لوله (۲) در جهت نشان داده شده در شکل بالا خواهد بود. با کمی دقت می‌توان فهمید، جهت جریان القایی در مقاومت R' ، از B به A است.

گام ۶ می‌دانیم جهت میدان مغناطیسی القایی در سیم‌لوله (۲) از قطب S به N است؛ بنابراین D ، قطب S سیم‌لوله (۲) است.

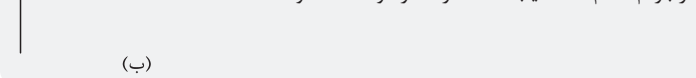


۴۶ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ در حرکت راست خط شتاب ثابت، سرعت متوسط در بازه زمانی Δt برابر سرعت متحرک در لحظه وسط این بازه زمانی است. مثلاً در نمودار سرعت - زمان شکل (الف)، سرعت متوسط متحرک در بازه t_1 تا t_2 برابر v' است.



۲ شیب خط گذرنده از دو نقطه نمودار سرعت - زمان برای یک بازه زمانی معین برابر شتاب متوسط در آن بازه زمانی است. مثلاً در شکل (ب)، شیب خط AB برابر شتاب متوسط در بازه t_1 تا t_2 است. شتاب متوسط متحرک در بازه t_1 تا t_2 = شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B





$$v_{av,A} = \frac{0 - 12}{6} = -2 \text{ m/s} \xrightarrow{v_B = v_{av,A}} v_B = -2 \text{ m/s}$$

$$x_B = vt + x_0 \xrightarrow{v = -2 \text{ m/s}, t = 3/\Delta s, x_B = 0} 0 = -2(3/\Delta) + x_0$$

$$\Rightarrow x_0 = 6 \text{ m} \Rightarrow x_B = -2t + 6$$

گام ۴ با داشتن معادله مکان - زمان دو متحرک، لحظه‌هایی را که دو متحرک به هم می‌رسند، محاسبه می‌کنیم.

$$x_A = x_B \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = -2t + 6 \Rightarrow t^2 - 6t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t' = 1 \text{ s} \\ t'' = 5 \text{ s} \end{cases}$$

گام ۵ با توجه به معادله مکان - زمان متحرک A و این که متحرک A در لحظه $t = \frac{2+6}{2} = 4 \text{ s}$ تغییر جهت می‌دهد، مسافت طی‌شده و تندی متوسط متحرک را از $t' = 1 \text{ s}$ تا $t'' = 5 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$x_A = t^2 - 8t + 12 \Rightarrow \begin{cases} t' = 1 \text{ s} \Rightarrow x_1 = 1 - 8 + 12 = 5 \text{ m} \\ t = 4 \text{ s} \Rightarrow x_4 = (4)^2 - 8(4) + 12 = -4 \text{ m} \\ t'' = 5 \text{ s} \Rightarrow x_5 = (5)^2 - 8(5) + 12 = -3 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ell = |x_4 - x_1| + |x_5 - x_4|$$

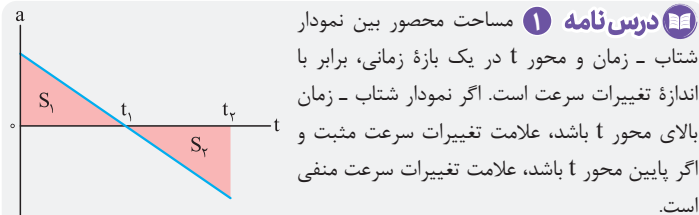
$$\Rightarrow \ell = |-4 - 5| + |-3 - (-4)| = 9 + 1 = 10 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{10}{5-1} = 2.5 \text{ m/s}$$



۴۹ - گزینه ۲

نکته استراتژی در سؤالاتی که نمودار شتاب - زمان متحرکی را به شما می‌دهند، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنید. چون با استفاده از نمودار سرعت - زمان متحرک، می‌توانید مسافت طی‌شده، جابه‌جایی، سرعت متوسط، تندی متوسط و ... را به دست بیاورید.



$$t_1 \text{ تا } t_2: \Delta v_1 = S_1$$

$$t_2 \text{ تا } t_3: \Delta v_2 = -S_2$$

$$t_1 \text{ تا } t_3: \Delta v = S_1 - S_2$$

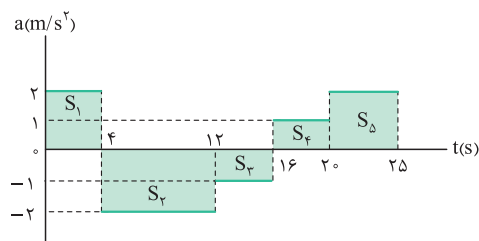
۲ سرعت متوسط: نسبت جابه‌جایی متحرک به مدت‌زمان جابه‌جایی:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

۳ تندی متوسط: نسبت مسافت طی‌شده به مدت‌زمان:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

گام ۴ قبل از این که عبارت‌ها را بررسی کنیم، باید نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنیم. پس به سراغ مساحت محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور t می‌رویم (شکل (الف)، تا با استفاده از آن بتوانیم نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنیم.



(الف)

$$\Delta v_1 = S_1 = 2 \times 4 = 8 \text{ m/s}$$



۴۷ - گزینه ۴

درس‌نامه جابه‌جایی متحرک در T ثانیه n ام:

$$\Delta x_n = (n-0/\Delta) a T^2 + v_0 T$$

سرعت اولیه متحرک
↑
شتاب متحرک

گام ۴ با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x_n = (n-0/\Delta) a T^2 + v_0 T \begin{cases} T=4 \text{ s}, n_1=2 \\ \Delta x_2 = 400 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow 400 = (2-0/\Delta) a (4)^2 + 4v_0$$

$$\begin{cases} T=4 \text{ s}, n_2=4 \\ \Delta x_4 = 304 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow 304 = (4-0/\Delta) a (4)^2 + 4v_0$$

گام ۵ حالا با تشکیل دستگاه می‌توانیم شتاب متحرک را به دست آوریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 400 = 24a + 4v_0 \\ 304 = 64a + 4v_0 \end{cases} \Rightarrow -96 = 32a \Rightarrow |a| = 3 \text{ m/s}^2$$



۴۸ - گزینه ۲

نکته استراتژی ابتدا معادله مکان - زمان متحرک A را از روی نمودار به دست آورید، سپس از روی سرعت متوسط متحرک A در ۶ ثانیه اول، سرعت و معادله مکان - زمان متحرک B را محاسبه کنید و در نهایت از روی دو معادله، لحظات به هم رسیدن دو متحرک و تندی متوسط متحرک A در این بازه زمانی را به دست آورید.

درس‌نامه ۱ در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 با سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ برابر است.

۲ با داشتن ۳ نقطه از نمودار مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، می‌توانیم معادله مکان - زمان متحرک را به دست بیاوریم.

۳ لحظه‌ای که دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند، همان لحظه‌ای است که نمودار مکان - زمان دو متحرک یکدیگر را قطع می‌کنند.

گام ۴ ابتدا معادله مکان - زمان متحرک A (حرکت با شتاب ثابت) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t_1 = 2 \text{ s}: x_1 = 0 \\ t_2 = 3/\Delta \text{ s}: x_2 = -3/7\Delta \text{ m} \\ t_3 = 6 \text{ s}: x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0}$$

$$0 = \frac{1}{2} a (2)^2 + v_0 (2) + x_0 \Rightarrow 2a + 2v_0 + x_0 = 0$$

$$-3/7\Delta = \frac{1}{2} a (3/\Delta)^2 + v_0 (3/\Delta) + x_0$$

$$\Rightarrow \frac{49}{\Delta} a + 3/\Delta v_0 + x_0 = -3/7\Delta$$

$$0 = \frac{1}{2} a (6)^2 + v_0 (6) + x_0 \Rightarrow 18a + 6v_0 + x_0 = 0$$

$$\xrightarrow{x_1 = x_2 = 0} 2a + 2v_0 + x_0 = 18a + 6v_0 + x_0$$

$$\Rightarrow -4v_0 = 16a \Rightarrow v_0 = -4a \xrightarrow{x_1 = 0} 2a + 2(-4a) + x_0 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 6a \xrightarrow{x_2 = -3/7\Delta \text{ m}} -3/7\Delta = \frac{49}{\Delta} a + 3/\Delta (-4a) + 6a$$

$$\Rightarrow -3/7\Delta = -\frac{15}{\Delta} a \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\xrightarrow{v_0 = -4a, x_0 = 6a} \begin{cases} v_0 = -8 \text{ m/s} \\ x_0 = 12 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow x_A = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x_A = t^2 - 8t + 12$$

گام ۵ به کمک سرعت متوسط متحرک A در ۶ ثانیه اول، سرعت متحرک B (حرکت یکنواخت) و معادله $x - t$ آن را می‌نویسیم.

$$v_{av,A} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{x_6 - x_0}{\Delta t} \xrightarrow{x_0 = 12 \text{ m}, x_6 = 0, \Delta t = 6 \text{ s}}$$

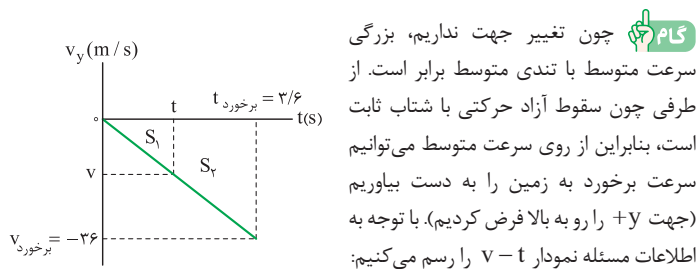
همان طور که می بینید، تندی متوسط متحرک در کل زمان حرکت به اندازه $0/16 \text{ m/s}$ (بیشتر از بزرگی سرعت متوسط آن در این بازه زمانی است). ✓

گزینه ۳

استراتژی نمودار $v-t$ را با توجه به اطلاعات مسئله رسم کرده و از تشابه مثلثها کمک بگیرید.

نکته در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه یک جسم، تندی متوسط برابر با نصف تندی لحظه برخورد گلوله با زمین است.

$$s_{av} = |v_{av}| = \frac{|v_{\text{برخورد}}|}{2}$$



$$v_{av} = \frac{v_0 + v_{\text{برخورد}}}{2} \Rightarrow -18 = \frac{0 + v_{\text{برخورد}}}{2} \Rightarrow v_{\text{برخورد}} = -36 \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ a = -g = -10 \text{ m/s}^2 \end{cases} \Rightarrow t_{\text{برخورد}} = \frac{v_{\text{برخورد}}}{-10} \Rightarrow t_{\text{برخورد}} = \frac{-36}{-10} = 3/6 \text{ s}$$

اگر سرعت متحرک در لحظه ای که متحرک $\frac{1}{4}$ مسیر را پیموده (لحظه t) برابر با v باشد، دو مثلث در نمودار $v-t$ ایجاد می شود؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\left(\frac{t}{3/6}\right)^2 = \left(\frac{v}{-36}\right)^2 = \frac{S_1}{S_1 + S_2} \Rightarrow \left(\frac{t}{3/6}\right)^2 = \left(\frac{v}{-36}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow t = 1/2 \text{ s}, v = -12 \text{ m/s}$$

حالا با داشتن سرعت متحرک در لحظه t و لحظه برخورد، سرعت متوسط متحرک را به دست می آوریم:

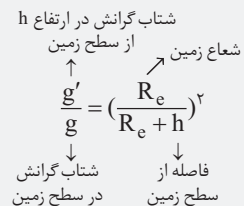
$$v_{av} = \frac{v + v_{\text{برخورد}}}{2} \Rightarrow v_{av} = \frac{-12 + (-36)}{2} = -24 \text{ m/s}$$

چون جسم تغییر جهت نداده است، پس بزرگی سرعت متوسط با تندی متوسط برابر است.

$$s_{av} = |v_{av}| = 24 \text{ m/s}$$

گزینه ۱

درس نامه شتاب گرانش در اطراف کره زمین، با مربع فاصله از مرکز زمین نسبت وارون دارد.



$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2 \xrightarrow{h=4R_e} \frac{g'}{g} = \left(\frac{R_e}{5R_e}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0/04 \Rightarrow g' = 0/04 g$$

$$g \text{ درصد تغییرات} = \frac{g' - g}{g} \times 100 = \frac{0/04g - g}{g} \times 100 = -0/96 \times 100 = -96\%$$

گزینه ۴

درس نامه نیروی اصطکاک جنبشی:

$$f_k = \mu_k \times F_N \rightarrow (N)$$

نیروی عمودی سطح (N)

ضرب اصطکاک جنبشی

نیروی اصطکاک جنبشی (N)

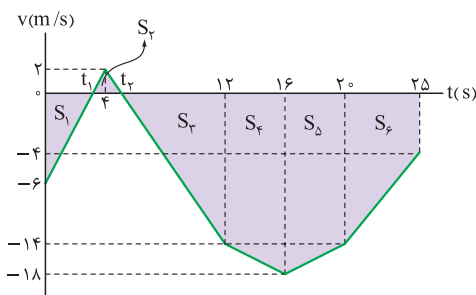
$$\Delta v_p = -S_p = -(12-4) \times 2 = -16 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_r = -S_r = -(16-12) \times 1 = -4 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_f = S_f = (20-16) \times 1 = 4 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_d = S_d = (25-20) \times 2 = 10 \text{ m/s}$$

حالا می توانیم نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنیم. (شکل (ب)).



(ب)

عجب نموداری شد! برای این که نمودارمان کامل تر شود، لحظه های t_1 و t_2 را با استفاده از تشابه مثلثها به دست می آوریم. (با کمک معادله سرعت - زمان هم می توانید به دست بیاورید).

$$\frac{4}{6} = \frac{4-t_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = 12-3t_1 \Rightarrow 4t_1 = 12 \Rightarrow t_1 = 3 \text{ s}$$

$$\frac{4}{14} = \frac{t_2-4}{12-t_2} \Rightarrow 12-t_2 = 7t_2-28 \Rightarrow 8t_2 = 40 \Rightarrow t_2 = 5 \text{ s}$$

حالا به سراغ بررسی عبارت ها می رویم.

(الف) سرعت متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ مثبت است؛ بنابراین متحرک در این بازه زمانی (یعنی ۲s) در جهت محور x حرکت می کند. ✓

(ب) برای این که مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0 \text{ s}$ تا $t_2 = 25 \text{ s}$ را به دست بیاوریم، از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t استفاده می کنیم (شکل (ب)).

$$\begin{aligned} \ell &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 \\ &= \frac{3 \times 6}{2} + \frac{(5-3) \times (2)}{2} + \frac{(12-5) \times (14)}{2} + \frac{(14+18) \times (16-12)}{2} \\ &\quad + \frac{(14+18) \times (20-16)}{2} + \frac{(14+4) \times (25-20)}{2} \\ &= 9 + 2 + 49 + 64 + 64 + 45 = 233 \text{ m} \end{aligned}$$

پس مسافت طی شده توسط متحرک در کل حرکت، برابر با 233 m است. ✗

(پ) در بازه زمانی که نمودار سرعت - زمان متحرک به محور t نزدیک می شود، نوع حرکت متحرک کندشونده است؛ بنابراین با توجه به شکل (ب)، نوع حرکت متحرک در بازه های زمانی $(0, 3 \text{ s})$ ، $(4 \text{ s}, 5 \text{ s})$ و $(16 \text{ s}, 25 \text{ s})$ کندشونده است که مجموعاً برابر با 13 s (یعنی $3+1+9=13$) است. این مقدار را نسبت به کل زمان برحسب درصد به دست می آوریم. ✗

$$\frac{13}{25} \times 100 = 52\%$$

(ت) مسافت طی شده توسط متحرک در کل زمان حرکت را در عبارت (ب) به دست آوریم؛ پس می توانیم تندی متوسط متحرک در کل زمان حرکت را با جای گذاری داده ها در رابطه مقابل محاسبه کنیم.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\ell=233 \text{ m}}{\Delta t=25 \text{ s}} \Rightarrow s_{av} = \frac{233}{25} = 9/32 \text{ m/s}$$

اما برای محاسبه سرعت متوسط متحرک در کل زمان حرکت به جابه جایی متحرک در این بازه زمانی نیاز داریم. با توجه به شکل (ب) و با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان متحرک و محور t، جابه جایی متحرک در کل زمان حرکت را به دست می آوریم.

$$\Delta x = -S_1 + S_2 - S_3 - S_4 - S_5 - S_6 = -9 + 2 - 49 - 64 - 64 - 45 = -229 \text{ m}$$

در نهایت با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، سرعت متوسط متحرک در کل زمان حرکت را

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x=-229 \text{ m}}{\Delta t=25 \text{ s}} \Rightarrow v_{av} = -9/16 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow |v_{av}| = 9/16 \text{ m/s}$$

۵۴- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

۲ بزرگی نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت:

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

۳ ذره‌ای با بار q در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در حال حرکت با سرعت $\vec{v}$ است.

$$F = |q|vB\sin\theta$$

اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره،
در رابطه بالا، θ زاویه بین جهت حرکت بار الکتریکی (بردار $\vec{v}$) و جهت میدان مغناطیسی (بردار $\vec{B}$) است.

گام ۱

نکته ذره α ، هسته اتم هلیوم (${}^4_2\text{He}$)، ذره β^- ، الکترون (${}^0_{-1}\text{e}$) است.

ابتدا به کمک شکل نسبتی رابطه انرژی جنبشی، نسبت تندی دو ذره را محاسبه می‌کنیم.
ذره α شامل ۲ پروتون و ۲ نوترون است؛ بنابراین جرم آن تقریباً ۴ برابر جرم پروتون است.
جرم ذره β^- هم که برابر جرم الکترون است. داریم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K_\alpha}{K_\beta} = \frac{m_\alpha}{m_\beta} \times \left(\frac{v_\alpha}{v_\beta}\right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{4m_p}{m_e} \times \left(\frac{v_\alpha}{v_\beta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_\alpha}{v_\beta}\right)^2 = \frac{m_e}{4m_p} = \frac{1}{4 \times 1836} = \frac{1}{7344} \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{v_\alpha}{v_\beta} = \frac{1}{\sqrt{7344}} = \frac{1}{85.7} \approx \frac{1}{86}$$

نیروی مرکزگرای وارد بر ذرات که باعث چرخش آن‌ها می‌شود، همان نیروی مغناطیسی وارد بر آن‌ها است؛ بنابراین:

$$F_c = F_B \xrightarrow{\text{یکسان:}} \frac{mv^2}{r} = |q|vB \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B}$$

$$\xrightarrow{\text{یکسان:}} \frac{r_\alpha}{r_\beta} = \frac{m_\alpha}{m_\beta} \times \frac{v_\alpha}{v_\beta} \times \frac{|q_\beta|}{|q_\alpha|} = \frac{4m_p}{m_e} \times \frac{v_\alpha}{v_\beta} \times \frac{|q_e|}{|q_\alpha|}$$

$$= 4 \times 1836 \times \frac{1}{86} \times \frac{1}{2} = \frac{1836}{43} \approx 42.7 \approx 43$$

۵۵- گزینه ۲

درس‌نامه انتشار موج عرضی:

۱ هرگاه جهت انتشار موج عرضی به سمت چپ باشد، هر ذره از محیط می‌خواهد حرکت ذره سمت راست خود را تکرار کند. (به طور متناظر، این نکته را در مورد انتشار موج عرضی به سمت راست نیز می‌توانیم به کار ببریم).

۲ مسافتی که هر ذره از محیط در مدت یک دوره طی می‌کند، به اندازه ۴ برابر دامنه است، اما جابه‌جایی آن در مدت یک دوره، صفر است.

۳ تندی انتشار موج عرضی در یک محیط ثابت است و از روابط زیر به دست می‌آید:

$$(m/s) \leftarrow v = \frac{\text{مسافت } \Delta x \rightarrow (m)}{\Delta t \rightarrow (s) \text{ بازه زمانی}} \Rightarrow v = \frac{\lambda \rightarrow (m)}{T \rightarrow (s) \text{ دوره}}$$

موارد (الف) تا (ت) را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

(الف) نقطه M می‌خواهد حرکت ذره سمت راست خود را تکرار کند؛ پس به سوی بالا حرکت می‌کند و چون از مرکز نوسان خود دور می‌شود، حرکت کندشونده دارد. ✓

(ب) ابتدا دوره حرکت را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta}{\lambda} = 20 \Rightarrow \lambda = 16 \text{ cm} = 16 \times 10^{-2} \text{ m}$$

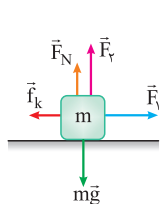
$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow 8 = \frac{16 \times 10^{-2}}{T} \Rightarrow T = 2 \times 10^{-2} \text{ s} \quad \checkmark$$

در مدت 0.1 s که معادل $\frac{T}{2}$ است، هر ذره از محیط مسافتی به اندازه ۲ برابر دامنه را می‌پیماید که 8 cm است. ✓

۲ رابطه قانون دوم نیوتون:

$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow (N/kg) \text{ شتاب}$$

جرم (kg) $\downarrow$
نیروی خالص
وارد بر جسم (N)



گام ۱ ابتدا قانون دوم نیوتون را در راستای قائم می‌نویسیم و نیروی عمودی سطح و در ادامه نیروی اصطکاک را به دست می‌آوریم: ($F_y = F_N = F$)

$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_N + F_f - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg - F$$

$$f_k = \mu_k \times F_N = \mu_k (mg - F)$$

گام ۲ قانون دوم نیوتون را در راستای افقی می‌نویسیم:

$$(F_{\text{net}})_x = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k (mg - F) = ma$$

$$\Rightarrow F - 0.25(40 - F) = 4 \times 2/5 \Rightarrow F - 10 + 0.25F = 1.6$$

$$\Rightarrow 1.25F = 11.6 \Rightarrow F = 9.28 \text{ N}$$

گام ۳ در حالت جدید، قانون دوم نیوتون را دوباره در راستای افقی می‌نویسیم:

$$F' - f'_k = ma' \xrightarrow{F' = 1.25F = 11.6 \text{ N}} 20 - 0.25(40 - 20) = 4a'$$

$$\Rightarrow 20 - 5 = 4a' \Rightarrow a' = 3.75 \text{ m/s}^2$$

گام ۴ در آخر درصد تغییر شتاب را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{a' - a}{a} \times 100 = \frac{3.75 - 2/5}{2/5} \times 100 = 75\%$$

۵۳- گزینه ۴

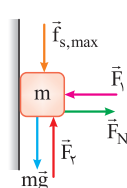
درس‌نامه ۱ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی که جسم برای شروع حرکت با آن روبه‌رو می‌شود، نیروی اصطکاک در آستانه حرکت نامیده می‌شود و جهت آن در خلاف جهتی است که جسم می‌خواهد شروع به حرکت کند.

بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی (N)
 $f_{s,\text{max}} = \mu_s \times F_N \rightarrow$ (N) نیروی عمودی سطح
ضریب اصطکاک ایستایی

۲ دو نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک از طرف سطح بر جسم اثر می‌کنند. این دو نیرو بر هم عمود بوده و برآیند آن‌ها، نیروی سطح بر جسم نام دارد.

$$R = \sqrt{f^2 + F_N^2}$$

در رابطه بالا f می‌تواند f_s ، $f_{s,\text{max}}$ یا f_k باشد.



گام ۱ نیروهای وارد بر جسم در آستانه حرکت را رسم می‌کنیم:

$$(F_{\text{net}})_x = 0 \Rightarrow F_N = F$$

گام ۲ نیروهای $f_{s,\text{max}}$ و F_N را به دست می‌آوریم: $f_{s,\text{max}} = \mu_s \times F_N = 0.5 \times 40 = 20 \text{ N}$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s,\text{max}}^2} \xrightarrow{F_N = 40 \text{ N}, f_{s,\text{max}} = 20 \text{ N}} 44.72 = \sqrt{(F_N)^2 + (0.5 \times F_N)^2}$$

$$\Rightarrow 44.72 = \sqrt{F_N^2 + 0.25 F_N^2} \Rightarrow 44.72 = \sqrt{1.25 F_N^2} \Rightarrow 44.72 = \frac{1}{2} F_N \times \sqrt{5} \Rightarrow F_N = 68 \text{ N}$$

$$f_{s,\text{max}} = 0.5 \times 68 = 34 \text{ N}$$

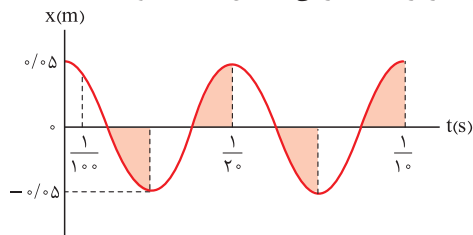
گام ۳ نیروی خالص در راستای قائم را برابر صفر قرار می‌دهیم و جرم را به دست می‌آوریم:

$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_f - f_{s,\text{max}} - mg = 0 \Rightarrow F_f - f_{s,\text{max}} = mg$$

$$\xrightarrow{F_f = 25 \text{ N}, f_{s,\text{max}} = 34 \text{ N}} 25 - 34 = mg \Rightarrow 1 = 10m$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{10} \text{ kg} \Rightarrow m = 100 \text{ g}$$

در این بازه زمانی، نوع حرکت نوسانگر در ۴ قسمت رنگی مشخص شده، کندشونده است.



$$\text{زمان حرکت کندشونده} = 4 \times \frac{T}{4} = T = \frac{1}{f} \text{ s}$$

گزینه ۴ - ۵۸

استراتژی ابتدا از روی اختلاف بسامد تشدید دو هماهنگ متوالی، بسامد تشدیدي هماهنگ اول را به دست بیاورید، سپس با داشتن بسامد تشدیدي هماهنگ اول و طول تار، تندی انتشار موج عرضی در تار را محاسبه کنید.

درس‌نامه ۱ در یک تار دو انتها بسته، اختلاف بسامد تشدیدي دو هماهنگ متوالی، برابر با f_1 است.

$$f_{n+1} - f_n = f_1$$

شماره هماهنگ

۲ بسامد تشدیدي هماهنگ n ام در یک تار دو انتها بسته:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \rightarrow \text{تندی انتشار موج عرضی (m/s)}$$

$$f_n = \frac{nv}{2L} \rightarrow \text{طول تار (m)}$$

گام ۱ با توجه به اختلاف بسامد دو هماهنگ متوالی، f_1 را به دست می‌آوریم:

$$f_1 = 400 - 320 = 80 \text{ Hz}$$

گام ۲ حالا با داشتن f_1 و طول تار، تندی انتشار موج عرضی را به دست می‌آوریم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow{n=1} f_1 = \frac{v}{2L} \xrightarrow{f_1=80 \text{ Hz}, L=40 \text{ cm}=0.4 \text{ m}} 80 = \frac{v}{2 \times 0.4} \rightarrow v = 64 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v = 64 \text{ m/s}$$

گزینه ۲ - ۵۹

شفاف‌سازی فاصله یک قله و یک دره بعد از آن برابر با نصف طول موج $(\frac{\lambda}{2})$ است.

درس‌نامه ۱ تندی انتشار موج عرضی در تار تحت کشش:

$$v = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{F}{\rho \pi}} \rightarrow \text{نیروی کشش (N)}$$

$$\downarrow$$

چگالی (kg/m^3) قطر مقطع (m)

۲ رابطه بین تندی انتشار موج، بسامد موج و طول موج:

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow \text{تندی انتشار موج (m/s)}$$

$$\downarrow$$

بسامد (Hz) طول موج (m)

گام ۱ فاصله یک قله تا یک دره بعد از آن، برابر با نصف طول موج $(\frac{\lambda}{2})$ است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{5}{100} \Rightarrow \lambda = 0.1 \text{ m}$$

گام ۲ برای این که بسامد ایجاد شده در تار را به دست بیاوریم، به تندی انتشار موج نیاز داریم. با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{F}{\rho \pi}} \xrightarrow{D=8 \times 10^{-3} \text{ m}, \pi=3, F=267 \text{ N}, \rho=8900 \text{ kg/m}^3} v = \frac{1}{8 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{267}{8900 \times 3}} = 25 \text{ m/s}$$

گام ۳ حالا می‌توانیم بسامد ایجاد شده در تار را محاسبه کنیم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{\lambda=0.1 \text{ m}, v=25 \text{ m/s}} \frac{1}{100} = \frac{25}{f} \Rightarrow f = 250 \text{ Hz}$$

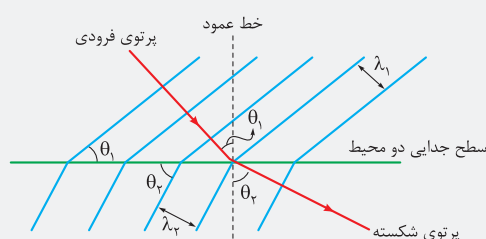
(پ) جابه‌جایی هر ذره از محیط در مدت یک دوره یعنی 0.2 s برابر صفر است. البته فقط نقاطی از تصویر که در مرکز نوسان خود قرار دارند، پس از 0.1 s جابه‌جایی صفر دارند، اما این موضوع برای همه ذرات محیط فراگیر نیست. $\times$

(ت) مسافتی که موج در مدت 0.2 s یعنی یک دوره طی می‌کند برابر 16 cm است.

$$\ell = v \Delta t \Rightarrow \ell = 8 \times 2 \times 10^{-2} = 16 \times 10^{-2} \text{ m} = 16 \text{ cm} \quad \times$$

گزینه ۳ - ۵۶

درس‌نامه مطابق شکل زیر، وقتی نوری از یک محیط وارد محیط دیگری می‌شود، از مسیر خود منحرف شده و دچار شکست می‌شود و رابطه زیر برقرار است:



$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

↑ زاویه شکست
↓ زاویه تابش

طول موج در محیط دوم
↑
↑
↓
طول موج در محیط اول

♦ در هر محیط، زاویه بین جبهه موج و سطح جدایی دو محیط (مانع)، همان زاویه پرتو با خط عمود است.

♦ فاصله دو جبهه موج متوالی در هر محیط، طول موج در آن محیط را نشان می‌دهد.

گام ۱ با توجه به شکل $\lambda_1 = 6 \text{ cm}$ است.

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 2 \Rightarrow \lambda_2 = 6 + 2 = 8 \text{ cm}$$

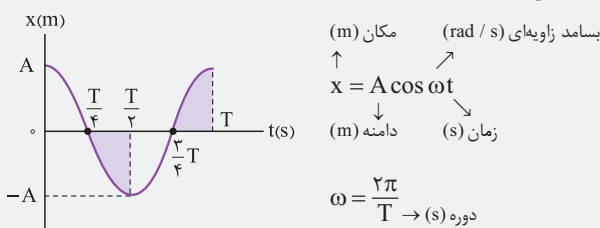
گام ۲ با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر می‌توانیم بنویسیم: (توجه کنید که در این جا $\theta_1 = \alpha$ و $\theta_2 = \beta$ هستند.)

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{8}{6}$$

$$\xrightarrow{\sin \alpha = \sin 37^\circ = 0.6} \frac{\sin \beta}{0.6} = \frac{8}{6} \Rightarrow \sin \beta = 0.8 \Rightarrow \beta = 53^\circ$$

گزینه ۱ - ۵۷

درس‌نامه ۱ معادله مکان - زمان و نمودار مکان - زمان در حرکت هماهنگ ساده:



۲ در بازه‌هایی از زمان که اندازه شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان رو به کاهش است، حرکت کندشونده است. این بازه‌های زمانی در شکل فوق به صورت رنگ‌شده مشخص شده‌اند و هر کدام معادل $\frac{T}{4}$ هستند.

گام ۱ با استفاده از معادله مکان - زمان نوسانگر، دوره حرکت را به دست می‌آوریم:

$$x = 0.5 \cos 4\pi t \text{ و } \omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \Rightarrow \frac{2}{T} = 4 \Rightarrow T = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

گام ۲ بازه زمانی $t_1 = 0.1 \text{ s}$ تا $t_2 = 0.15 \text{ s}$ را روی نمودار مکان - زمان مشخص می‌کنیم.



گام ۱ با توجه به این که میدان الکتریکی بین صفحات، یکنواخت است، در حالت اول اختلاف پتانسیل بین نقطه P و صفحه B را به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{V_A - V_B}{d_{AB}} = \frac{V_P - V_B}{d_{PB}} \Rightarrow \frac{100}{16} = \frac{\Delta V_{PB}}{12} \Rightarrow \Delta V_{PB} = 75 \text{ V}$$

گام ۲ در حالت دوم با تغییر فاصله بین صفحات و جابه‌جاشدن نقطه P، مانند گام اول رفتار می‌کنیم. حالت جدید صفحات و نقطه P در حالت جدید که P' نام‌گذاری شده، در شکل مقابل مشخص شده است.

$$E' = \frac{V_A - V_B}{d_{AB}} = \frac{V_{P'} - V_B}{d_{P'B}} \Rightarrow \frac{100}{20} = \frac{\Delta V_{P'B}}{12} \Rightarrow \Delta V_{P'B} = 60 \text{ V}$$

گام ۳ پتانسیل الکتریکی نقطه P در حالت دوم و اول را مقایسه می‌کنیم:

$$\Delta V_{P'B} - \Delta V_{PB} = (V_{P'} - V_B) - (V_P - V_B) = V_{P'} - V_P$$

$$\Rightarrow 60 - 75 = V_{P'} - V_P \Rightarrow V_{P'} - V_P = -15 \text{ V}$$

بنابراین پتانسیل نقطه P، ۱۵ ولت کاهش می‌یابد.

گزینه ۴

درس‌نامه ۱ هر چه خطوط میدان الکتریکی به یکدیگر نزدیک‌تر باشند، اندازه میدان الکتریکی بزرگ‌تر است.

$$E_A > E_B$$

جابه‌جایی (m)

$$\Delta U_E = -E |q| d \cos \theta \rightarrow \text{زاویه بین نیروی الکتریکی و جابه‌جایی}$$

میدان الکتریکی (N/C)

گام ۱ با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی، $\Delta U_E + \Delta K = 0$ است. تغییرات انرژی جنبشی در هر سه مسیر یکسان است؛ بنابراین تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی نیز در هر سه مسیر یکسان است.

$$\Delta K_1 = \Delta K_2 = \Delta K_3 \Rightarrow (\Delta U_E)_1 = (\Delta U_E)_2 = (\Delta U_E)_3$$

گام ۲ به کمک رابطه $\Delta U_E = -E |q| d \cos \theta$ و برابری تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی در هر سه مسیر داریم:

$$-E_1 |q| d_1 \cos \theta_1 = -E_2 |q| d_2 \cos \theta_2 = -E_3 |q| d_3 \cos \theta_3$$

از آن‌جا که $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ است، داریم:

$$E_1 d_1 = E_2 d_2 = E_3 d_3$$

با توجه به تراکم خطوط میدان الکتریکی، اندازه میدان الکتریکی در حالت سوم از همه بیشتر و در حالت اول از همه کم‌تر است.

$$E_3 > E_2 > E_1 \Rightarrow d_2 < d_3 < d_1$$

گزینه ۲

درس‌نامه ۱ قانون کولن:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

ثابت کولن: $\frac{N \cdot m^2}{C^2}$

فاصله بین دو بار (m)

گام ۱ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_1 را به دست می‌آوریم. توجه کنید که q_1 را q فرض می‌کنیم:

$$\vec{F}_{r1} = \vec{F}_{r1} \quad r \quad q_1 = q \quad q_2 = 4q \quad q_3 = -2q$$

$$F_{r1} = \frac{k \times q \times 4q}{x^2} = \frac{4kq^2}{x^2}$$

$$F_{r1} = \frac{k \times q \times |-2q|}{(x+r)^2} = \frac{2kq^2}{(x+r)^2}$$

$$F_{t(q1)} = \frac{4kq^2}{x^2} - \frac{2kq^2}{(x+r)^2} = 2kq^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{(x+r)^2} \right)$$

گزینه ۲

نکته در دو آینه متقاطع، زاویه تابش یا بازتاب در برخورد n ام پرتو به آینه‌ها از رابطه $\theta_{i,n} = \theta_{r,n} = |(n-1)\alpha - \theta_{i,1}|$ مقابل به دست می‌آید:

در این رابطه α زاویه بین دو آینه و $\theta_{i,1}$ زاویه تابش در اولین برخورد پرتو به آینه‌ها است.

گام ۱ دومین برخورد به آینه (۲)، چهارمین برخورد به هر دو آینه است، پس $n = 4$ است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم چهارمین پرتوی بازتاب‌شده از دو آینه موازی آینه (۱) است.

در شکل روبه‌رو پرتوی تابش اولیه و پرتوی بازتاب چهارم را رسم کرده‌ایم. از قضیه دو خط موازی و یک خط مورب در هندسه کمک گرفتیم و زاویه α را در محل برخورد چهارم پرتو نشان داده‌ایم.

با توجه به شکل می‌توانیم $\theta_{r,4}$ و $\theta_{i,1}$ را به این صورت نشان دهیم:

$$\theta_{i,1} = 90^\circ - 2^\circ = 88^\circ$$

$$\theta_{r,4} = 90^\circ - \alpha$$

گام ۲ کافی است اطلاعاتمان را در رابطه نکته گفته شده قرار دهیم و به پاسخ تست برسیم:

$$\theta_{r,n} = (n-1)\alpha - \theta_{i,1} \xrightarrow{n=4} 90^\circ - \alpha = (4-1)\alpha - 88^\circ$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 178^\circ \Rightarrow \alpha = 44.5^\circ$$

گزینه ۳

درس‌نامه ۱ اگر بخواهیم عدد کوانتومی (n) خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته (n') را با استفاده از شماره خط طیفی آن رشته به دست بیاوریم، باید به صورت $n = n' + 1$ شماره خط طیفی را به دست آوریم:

مثلاً عدد کوانتومی (n) سومین خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در رشته پاشن ($n' = 3$) برابر است با:

$$n = 3 + 3 = 6$$

۲ کم‌ترین بسامد فوتون گسیلی یا جذبی ناشی از کم‌ترین انرژی ممکن است؛ یعنی حالتی که الکترون به نزدیک‌ترین مدار مجاور خود برود.

۳ طول موج خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n > n'$$

شماره رشته

گام ۱ سومین خط رشته پاشن یعنی:

$$\begin{cases} n' = 3 \\ n = 3 + 3 = 6 \end{cases}$$

گام ۲ کم‌ترین بسامد رشته براکت یعنی:

$$\begin{cases} n' = 4 \\ n = 5 \end{cases}$$

گام ۳ نسبت بسامدها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{f_{\text{پاشن}}}{f_{\text{براکت}}} = \frac{\frac{1}{\lambda_{\text{پاشن}}}}{\frac{1}{\lambda_{\text{براکت}}}} = \frac{R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} \right)}{R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right)} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{36}}{\frac{1}{16} - \frac{1}{25}} \Rightarrow \frac{f_{\text{پاشن}}}{f_{\text{براکت}}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{400}} = \frac{400}{12 \times 9} = \frac{100}{27}$$

گزینه ۱

درس‌نامه ۱ در میدان الکتریکی یکنواخت، میدان الکتریکی در هر نقطه دلخواه در این میدان، مقداری ثابت است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$E_{AB} = E_{CD} \Rightarrow \frac{V_B - V_A}{d_1} = \frac{V_D - V_C}{d_2}$$

۶۶ - گزینه ۳

درس‌نامه اختلاف پتانسیل دو سر باتری:

مقاومت درونی (Ω)

$$V = \mathcal{E} - rI \rightarrow (A) \text{ جریان خروجی از باتری}$$

نیروی محرکه مولد (V)

گام ۱ با کاهش مقاومت R_1 ، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد. در نتیجه جریان خروجی از باتری (I) افزایش می‌یابد. با توجه به رابطه $V = \mathcal{E} - Ir$ باتری، با افزایش جریان خروجی از باتری، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری کاهش می‌یابد.

گام ۲ جریان کل (I) بین دو مقاومت موازی R_2 و R_3 تقسیم می‌شود. از آن‌جا که مقاومت‌های R_2 و R_3 ثابت هستند، جریان کل که در حالت دوم افزایش یافته، بین آن‌ها تقسیم شده و جریان عبوری از R_2 و R_3 نیز زیاد می‌شود؛ پس مقدار آمپرسنج که جریان عبوری از R_3 را نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

گام ۳ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری، برابر با مجموع اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_1 و مقاومت R_2 است. به عبارتی داریم:

$$V_{\text{باتری}} = V_{R_1} + V_{R_2}$$

کاهش
افزایش

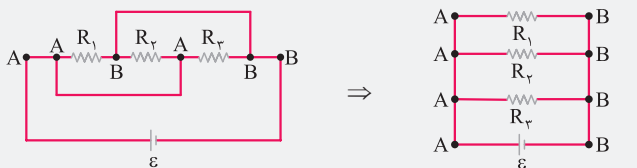
با توجه به کاهش اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری و افزایش اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_2 (به دلیل افزایش جریان عبوری از آن)، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_1 که همان عدد ولت‌سنج است، کاهش می‌یابد.

۶۷ - گزینه ۴

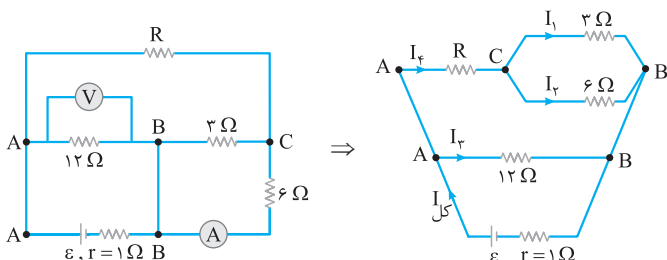
شفاف‌سازی ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت 12Ω و آمپرسنج آرمانی، جریان عبوری از مقاومت 6Ω را نشان می‌دهد.

درس‌نامه ساده کردن شکل مدار به روش نقاط هم‌پتانسیل:

برای این کار، نقاطی از مدار را که با سیم به یکدیگر وصل شده‌اند با یک نام مشترک در نظر می‌گیریم. بعد از نام‌گذاری چنین نقاطی از مدار، دو سر مولد یا دو سر مدار را مینا قرار داده و سایر اجزای مدار را بین نقطه‌های نام‌گذاری شده جای‌گذاری می‌کنیم تا شکل ساده‌تری به دست بیاید.



گام ۱ با نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل، مدار را به صورت ساده‌تر رسم می‌کنیم:



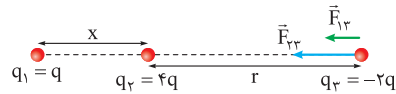
گام ۲ جریان عبوری از آمپرسنج، همان جریان عبوری از مقاومت 6Ω است. مقاومت‌های 6Ω و 3Ω با هم موازی هستند؛ بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی آن‌ها با هم برابر است.

$$V_{3\Omega} = V_{6\Omega} \Rightarrow 3 \times I_1 = 6 \times I_2 \xrightarrow{I_2=1A} 3I_1 = 6 \Rightarrow I_1 = 2A$$

گام ۳ جریان عبوری از مقاومت 12Ω را به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{ولت‌سنج}} = 12 \times I_3 \Rightarrow 12 = 12 \times I_3 \Rightarrow I_3 = 1A$$

گام ۴ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 را به دست می‌آوریم:



$$F_{13} = F_{r1} = \frac{kq_1q_3}{(x+r)^2}$$

$$F_{23} = \frac{k \times (4q) \times |-2q|}{r^2} = \frac{8kq^2}{r^2}$$

$$F_{t(q3)} = \frac{kq_1q_3}{(x+r)^2} + \frac{8kq^2}{r^2} = kq^2 \left(\frac{1}{(x+r)^2} + \frac{8}{r^2} \right)$$

گام ۵ بزرگی نیروی خالص وارد بر بار q_1 ، 70% درصد بیشتر از بزرگی نیروی خالص وارد بر بار q_3 است؛ بنابراین داریم:

$$F_{t(q1)} = F_{t(q3)} + 0.7F_{t(q3)} = 1.7F_{t(q3)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2} - \frac{1}{(x+r)^2} = \frac{1.7}{(x+r)^2} + \frac{6}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2} - \frac{2.7}{(x+r)^2} = \frac{6}{r^2} \xrightarrow{\times r^2} \frac{2r^2}{x^2} - \frac{2.7r^2}{(x+r)^2} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\left(\frac{x}{r}\right)^2} - \frac{2.7}{\left(\frac{x}{r} + 1\right)^2} = 6$$

$$\frac{2}{\frac{1}{4}} - \frac{2.7}{\left(\frac{1}{4} + 1\right)^2} = 6$$

اگر $\frac{x}{r}$ را برابر k فرض کنیم، آن‌گاه داریم:

$$k=1 \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{4}} - \frac{2.7}{\left(\frac{1}{4} + 1\right)^2} \neq 6$$

از گزینه‌ها کمک می‌گیریم:

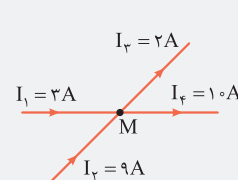
$$k=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{2.7}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2} = 8 - 1.125 = 6.875 \approx 6$$

۶۵ - گزینه ۴

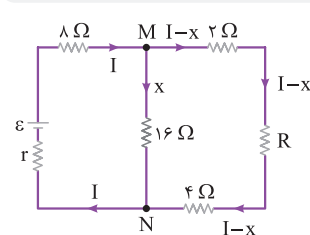
درس‌نامه ۱ تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن:

$$\text{اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)} \rightarrow R = \frac{V}{I} \leftarrow \text{مقاومت الکتریکی (}\Omega\text{) جریان (A)}$$

قاعده انشعاب: مجموع جریان‌هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می‌شوند، برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطه انشعاب خارج می‌شوند، مثلاً در شکل روبه‌رو، جریان $I_1 + I_2 = 12A$ به گره M وارد شده و جریان $I_3 + I_4 = 12A$ از آن خارج شده است.



گام ۱ مطابق شکل، جریان خروجی از باتری (جریان کلی) را I فرض می‌کنیم و جریان عبوری از مقاومت 16Ω را x در نظر می‌گیریم؛ بنابراین جریان عبوری از مقاومت 4Ω به اندازه $(I-x)$ خواهد بود.



گام ۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی مقاومت 8Ω ، سه برابر اختلاف پتانسیل الکتریکی مقاومت 4Ω است؛ بنابراین داریم:

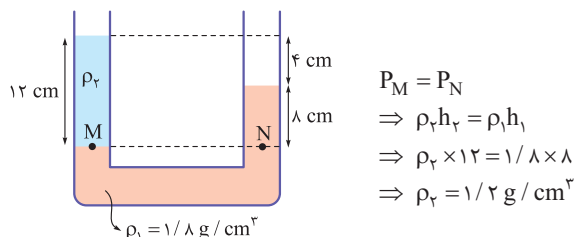
$$V_{8\Omega} = 3V_{4\Omega} \Rightarrow 8I = 3(4(I-x)) \Rightarrow 8I = 12I - 12x \Rightarrow x = \frac{I}{3}$$

گام ۳ اختلاف پتانسیل الکتریکی شاخه‌های بین نقاط M و N با هم برابر است؛ بنابراین با نوشتن تساوی از دو مسیر متفاوت داریم:

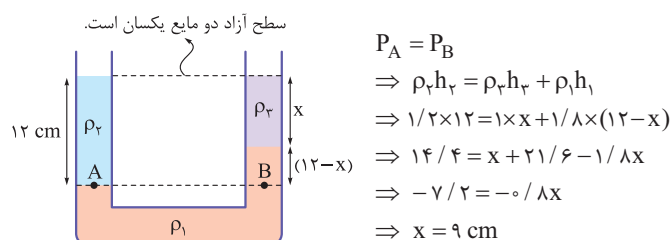
$$V_{MN} = V_{MN} \Rightarrow 16x = (2 + R + 4)(I-x)$$

$$\Rightarrow 16\left(\frac{I}{3}\right) = (R+6)\left(I - \frac{I}{3}\right) \Rightarrow 16 = 2R + 12 \Rightarrow R = 2\Omega$$

گام ۱ با توجه به تعادل مایع‌ها و برابری فشار در نقطه‌های M و N در شکل زیر، ابتدا جگالی مایع (۲) را به دست می‌آوریم:



گام ۲ پس از ریختن مایع (۳) در سمت راست لوله، وضعیت نهایی مطابق شکل زیر است. با توجه به برابری فشار در نقطه‌های A و B، مقدار x را به دست می‌آوریم:



$V_2 = Ah_2 = 2 \times 9 = 18 \text{ cm}^3$ حجم مایع سوم را به دست می‌آوریم:

۷۰- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

۲ کار نیروی وزن جسم برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است:

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg\Delta h$$

در رابطه بالا، اگر جسم از سطح زمین دور شود، $\Delta h > 0$ و اگر جسم به سطح زمین نزدیک شود، $\Delta h < 0$ است.

۳ قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_2 - K_1$$

رابطه بالا برای هر نوع مسیری برقرار است.

انرژی جنبشی در آغاز و پایان مسیر مهم است و این‌که در طول مسیر، انرژی جنبشی جسم چگونه تغییر کرده، اهمیتی ندارد.

۴ انرژی مکانیکی جسم برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم است:

$$E = K + U$$

۵ قانون پایستگی انرژی: کار نیروهای اتلافی مانند اصطکاک و مقاومت هوا برابر با تغییر انرژی مکانیکی است:

$$W_f = \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

گام ۱ کار نیروی وزن برابر است با:

$$W_{mg} = -mg\Delta h = -50 \times 10^{-3} \times 10 \times (0 - 1/6) = 0.8 \text{ J}$$

گام ۲ کار نیروی مقاومت هوا را می‌خواهیم.

روش قضیه کار - انرژی جنبشی:

در طول مسیر، دو نیروی وزن و مقاومت هوا روی جسم کار انجام می‌دهند؛ بنابراین:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{\text{مقاومت هوا}} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow W_{mg} + W_{\text{مقاومت هوا}} = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow 0.8 + W_{\text{مقاومت هوا}} = \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} \times (9^2 - 15^2)$$

$$\Rightarrow 0.8 + W_{\text{مقاومت هوا}} = -25 \times 10^{-3} \times (12)^2$$

$$\Rightarrow W_{\text{مقاومت هوا}} = -3/6 - 0.8 = -4/4 \text{ J}$$

گام ۱ طبق قاعده انشعاب در شکل صفحه قبل داریم:

$$\text{در گره C: } I_4 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_4 = 2 + 1 = 3 \text{ A}$$

$$I_{\text{کل}} = I_2 + I_4 \Rightarrow I_{\text{کل}} = 1 + 3 = 4 \text{ A}$$

گام ۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با عدد ولت‌سنج است؛ بنابراین داریم:

$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - I_{\text{کل}} r \Rightarrow 12 = \varepsilon - 4(1) \Rightarrow \varepsilon = 16 \text{ V}$$

۶۸- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ جریان الکتریکی خروجی از باتری:

نیروی محرکه مولد (V)

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{eq}} + r}$$

مقاومت معادل (Ω) خارجی (Ω) درونی

مقاومت الکتریکی (Ω)

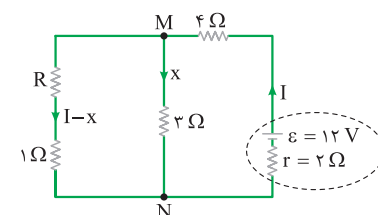
توان مصرفی (W) ← P = R I²

جریان الکتریکی (A)

۲ توان مصرفی مقاومت:

گام ۱ در شکل مقابل تقسیم‌بندی

جریان I_۱ بین دو شاخه مشخص شده است.



جریان کل (خروجی از باتری) را I در نظر گرفتیم.

گام ۲ توان مصرفی مقاومت ۱۲، ۳ Ω برابر توان مصرفی مقاومت ۱ Ω است؛ بنابراین داریم:

$$P_{3\Omega} = 12 P_{1\Omega} \xrightarrow{P=RI^2} 3(x)^2 = 12(1)(I-x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4(I-x)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} x = 2I - 2x \Rightarrow x = \frac{2I}{3}$$

گام ۳ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه M و N در نظر می‌گیریم تا مقاومت R

را به دست آوریم:

$$V_{MN} = V_{MN} \Rightarrow x(3) = (I-x)(R+1)$$

$$\Rightarrow \frac{2I}{3} \times 3 = \frac{I}{3} \times (R+1) \Rightarrow 6 = R+1 \Rightarrow R = 5 \Omega$$

گام ۴ جریان کل مدار را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{eq}} + r} = \frac{12}{(4 + \frac{6 \times 3}{6+3}) + 2} = \frac{12}{8} = 1.5 \text{ A}$$

گام ۵ توان مصرفی مقاومت ۴ Ω به دست می‌آید:

$$P_{4\Omega} = R I^2 = 4 \times (\frac{3}{2})^2 = 9 \text{ W}$$

۶۹- گزینه ۲

استراتژی در لوله‌های U شکل، فشار در نقاط هم‌تراز درون یک مایع را برابر با یکدیگر

قرار دهید و با استفاده از آن به خواسته سؤال برسید.

درس‌نامه فشار ناشی از مایع در عمق h از سطح آزاد مایع:

شتاب گرانشی (m/s²)

$$P = \rho gh$$

چگالی مایع (kg/m³)

۷۳ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ با توجه به معادلهٔ حالت گاز کامل ($PV = nRT$)، برای مقایسهٔ دو حالت مختلف، رابطهٔ کلی زیر را در نظر بگیرید و هر کمیتی را که در سؤال ثابت فرض شده بود، از طرفین حذف کنید.

حجم فشار
↑
 $\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$
↓
تعداد (K) دم
مول

۲ رابطهٔ بین تعداد مول گاز، جرم گاز و جرم مولی گاز:

جرم (g) $n = \frac{m}{M} \rightarrow$ تعداد مول (mol)
جرم مولی (g/mol) $M \rightarrow$

۳ فشار پیمانه‌ای (P_g): اختلاف فشار بین فشار مطلق و فشار جو:
 $P_g = P - P_0$

ابتدا تعداد مول نیتروژن و هلیوم را به دست می‌آوریم.

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow \begin{cases} n_{N_2} = \frac{56}{28} = 2 \text{ mol} \\ n_{He} = \frac{56}{4} = 14 \text{ mol} \end{cases} \xrightarrow{n_1 = n_{N_2} + n_{He}} \begin{cases} n_1 = 2 \text{ mol} \\ n_2 = 2 + 14 = 16 \text{ mol} \end{cases}$$

با توجه به معادلهٔ حالت می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \xrightarrow{T_1 = T_2} \frac{P_1}{n_1} = \frac{P_2}{n_2}$$

$$\frac{P_1 = 2P_0 + P_0 = 3P_0, n_1 = 2 \text{ mol}}{n_2 = 16 \text{ mol}} \rightarrow \frac{3P_0}{2} = \frac{P_2}{16} \Rightarrow P_2 = 24P_0$$

$$\Rightarrow P_{g_2} = P_2 - P_0 = 24P_0 - P_0 = 23P_0$$

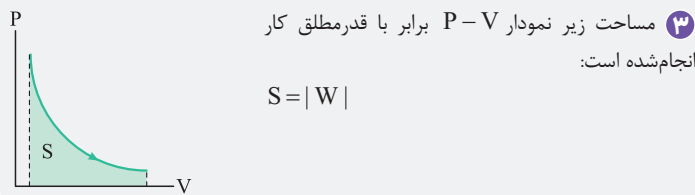
۷۴ - گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اگر نمودار $P - V$ یک فرایند، به صورت خطی باشد که امتداد آن از مبدأ مختصات می‌گذرد، در این فرایند، فشار و حجم گاز با یکدیگر نسبت مستقیم دارند و می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

۲ قانون اول ترمودینامیک:

گرمای
↑
کار محیط بر روی دستگاه $\Delta U = Q + W \rightarrow$ تغییرات انرژی درونی



۴ با توجه به این که نمودار $P - V$ در فرایند AC به صورت خطی است که امتداد آن از مبدأ می‌گذرد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{P_C}{P_A} = \frac{V_C}{V_A} \xrightarrow{P_C = 6 \text{ atm}, V_C = 8 \text{ L}, V_A = 2 \text{ L}} \frac{6}{P_A} = \frac{8}{2} \Rightarrow P_A = 1/5 \text{ atm}$$

۵ با استفاده از مساحت محصور داخل چرخه در نمودار $P - V$ ، قدرمطلق کار انجام‌شده در چرخه را محاسبه می‌کنیم:

$$|W_{\text{چرخه}}| = \frac{(8-2) \times 10^{-3} \times (6-1/5) \times 10^5}{2} = \frac{2700}{2} = 1350 \text{ J}$$

با توجه به این که چرخه پادساعتگرد است، پس کار محیط بر روی دستگاه در چرخه مثبت است.
 $W_{\text{چرخه}} = 1350 \text{ J}$

★ نکته تغییر انرژی درونی در یک چرخه ترمودینامیکی، صفر است.

۶ با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، گرمای مبادله‌شده در چرخه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta U_{\text{چرخه}} = Q_{\text{چرخه}} + W_{\text{چرخه}} \Rightarrow 0 = Q_{\text{چرخه}} + 1350 \Rightarrow Q_{\text{چرخه}} = -1350 \text{ J}$$

بنابراین گاز در این چرخه 1350 J گرما از دست می‌دهد.

روش قانون پایستگی انرژی:

$$W_{\text{مقاومت هوا}} = \Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) + mg \Delta h$$

$$\xrightarrow{mg \Delta h = -W_{\text{مقاومت هوا}}} W_{\text{مقاومت هوا}} = \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} \times (9^2 - 15^2) + (-0.8)$$

$$= -3/6 - 0.8 = -4/4 \text{ J}$$

$$\frac{|W_{\text{مقاومت هوا}}|}{W_{\text{mg}}} = \frac{4/4}{0.8} = 5/5$$

۴ خواستهٔ تست برابر است با:

۷۱ - گزینه ۳

استراتژی ابتدا کار نیروی وزن را به دست بیاورید، سپس به کمک قضیهٔ کار - انرژی جنبشی و با داشتن کار نیروی اصطکاک، تندی جسم در نقطهٔ B را محاسبه کنید.

۴ ابتدا کار نیروی وزن را در جابه‌جایی از A تا B به دست می‌آوریم:

(چون جابه‌جایی قائم جسم رو به بالا است، بنابراین کار نیروی وزن در این جابه‌جایی منفی است.)

$$W_{\text{mg}} = -mgh_{AB}$$

$$\xrightarrow{h_{AB} = 20 \times \sin 30^\circ = 10 \text{ m}} W_{\text{mg}} = -m \times 10 \times 10 = -1000 \text{ m}$$

۴ طبق قضیهٔ کار - انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:

$$W_t = \Delta K \xrightarrow{W_t = W_{\text{mg}} + W_{f_k}} -1000 \text{ m} + W_{f_k} = K_B - K_A$$

$$\xrightarrow{W_{f_k} = -\frac{1}{4} K_B} -1000 \text{ m} - \frac{1}{4} K_B = K_B - K_A \Rightarrow K_A - 1000 \text{ m} = \frac{5}{4} K_B$$

$$\xrightarrow{K = \frac{1}{2} mv^2} \frac{1}{2} mv_A^2 - 1000 \text{ m} = \frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{2} mv_B^2 \right)$$

$$\xrightarrow{v_A = 20 \text{ m/s}} \frac{1}{2} m \times 400 - 1000 \text{ m} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} mv_B^2 \Rightarrow 1000 \text{ m} = \frac{5}{4} mv_B^2$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 160 \Rightarrow v_B = 4\sqrt{10} \text{ m/s}$$

۷۲ - گزینه ۲

درس‌نامه ۱ گرمای لازم برای تغییر دما:

$$\left(\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \text{ یا } \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right) \text{ گرمای ویژه}$$

$$\xrightarrow{\uparrow} Q = mc \Delta \theta \rightarrow (K \text{ یا } ^\circ\text{C}) \text{ تغییر دما}$$

$$\downarrow$$

جرم (kg)

۲ گرمای لازم برای تغییر حالت از جامد به حالت مایع:

$$Q = mL_F$$

$$\downarrow$$

گرمای نهان ذوب (J / kg)

۳ طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شده تا رسیدن به حالت تعادل برابر با صفر است:

دمای تعادل $\theta = 10^\circ\text{C}$ است، پس با توجه به قانون پایستگی انرژی می‌توانیم بنویسیم:

$$-20^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_1} 0^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_2} 10^\circ\text{C}$$

$$\xrightarrow{\text{تعادل}} 10^\circ\text{C} \xleftarrow{Q_3} 10^\circ\text{C}$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

$$\Rightarrow mc_{\text{یخ}} \Delta \theta_1 + mL_F + mc_{\text{آب}} \Delta \theta_2 + 2mc_{\text{آب}} \Delta \theta_3 = 0$$

$$\Rightarrow m \times 2100 \times (0 - (-20)) + m \times 336000 + m \times 4200 \times (10 - 0)$$

$$+ 2m \times 4200 \times (10 - 0) = 0$$

$$\Rightarrow 42000m + 336000m + 42000m + 84000m - 84000m\theta = 0$$

$$\Rightarrow 504000m = 84000m\theta \Rightarrow \theta = \frac{504000}{84000} = 60^\circ\text{C}$$

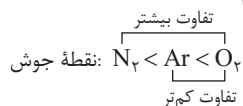
- ۴ دقت کنید که دمای $^{\circ}\text{C}$ -200 بالاتر از نقطه جوش هلیوم ($^{\circ}\text{C}$ -269) می‌باشد؛ بنابراین در هوای مایع با دمای $^{\circ}\text{C}$ -200 فیری از هلیوم نیست! (هر ماده‌ای بالاتر از نقطه جوش خود به حالت گاز است؛ پس هلیوم در دمای $^{\circ}\text{C}$ -200 هم‌چنان به حالت گاز باقی می‌ماند.)
- ۵ در تهیه هوای مایع با استفاده از فشار، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند. در این فرایند با کاهش دما تا $^{\circ}\text{C}$ 0 (نقطه ذوب یخ یا انجماد H_2O) رطوبت (H_2O) هوا به صورت یخ جدا می‌شود، سپس در دمای $^{\circ}\text{C}$ -78 (نقطه تصعید یا چگالش CO_2)، گاز کربن دی‌اکسید به حالت جامد درآمده و از مخلوط گازی جداافتی می‌کند.

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

(الف) دمای 193 K ($^{\circ}\text{C}$ -80 ، $273 - 193$)، بالاتر از نقطه جوش سه جزء اصلی سازنده هوا ($^{\circ}\text{C}$ -196 N_2 ، $^{\circ}\text{C}$ -183 O_2 و $^{\circ}\text{C}$ -186 Ar) است؛ بنابراین در این دما، هر سه ماده به حالت گاز هستند.

(ب) با توجه به ترتیب نقطه جوش گازهای N_2 ، Ar و O_2 داریم:



(پ) در ستون تقطیر جزء به جزء هوای مایع، اکسیژن، سومین جزئی است که از مخلوط جدا می‌شود. O_2 در بین گازهای هوا، رتبه دوم درصد حجمی را دارد، نه رتبه سوم!

(ت) در تهیه هوای مایع، با کاهش دمای هوا، ابتدا H_2O در دمای $^{\circ}\text{C}$ 0 و بعد CO_2 در دمای $^{\circ}\text{C}$ -78 به صورت جامد از هوا جدا می‌شوند.

۷۸ - گزینه ۴

گرافن، تک‌لایه‌ای از گرافیت است و ضخامت آن به اندازه قطر یک اتم کربن است.

نکته تغییرات شعاع اتمی در جدول تناوبی:

در یک دوره از چپ به راست با افزایش عدد اتمی ← شعاع اتمی عناصر، کاهش می‌یابد.

در یک گروه از بالا به پایین با افزایش عدد اتمی ← شعاع اتمی عناصر، افزایش می‌یابد.

کربن (C) و سیلیسیم (Si) در جدول دوره‌ای هم‌گروه (در گروه ۱۴) می‌باشند و چون عنصر کربن بالاتر است، در نتیجه شعاع اتمی کوچک‌تری نسبت به سیلیسیم دارد.

عنصرهای بور (B)، نیتروژن (N) و اکسیژن (O) در جدول دوره‌ای هم‌دوره (در دوره دوم) هستند و از آن‌جا که عنصر کربن (C)، بین بور و نیتروژن قرار دارد، بنابراین شعاع اتمی آن نیز، عددی مابین شعاع‌های اتمی این دو عنصر می‌باشد:

شعاع اتمی $\text{B} < \text{C} < \text{N}$ شعاع اتمی

$85 < \text{شعاع اتمی C (برحسب pm)} < 75$

تله هواسون باشد که ضخامت گرافن به اندازه قطر یک اتم کربن است؛ نه شعاع آن! آله هواسون به این موضوع نباشد، به اشتباه ۱ را به عنوان پاسخ انتخاب خواهید کرد که غلط اندر غلط!

بنابراین ضخامت گرافن باید در بازه زیر باشد:

$85 \times 2 < \text{قطر کربن (برحسب pm)} < 75 \times 2$

$170 < \text{ضخامت گرافن (برحسب pm)} < 150$

که براساس گزینه‌ها، عدد 154 pm را می‌توان به آن نسبت داد.

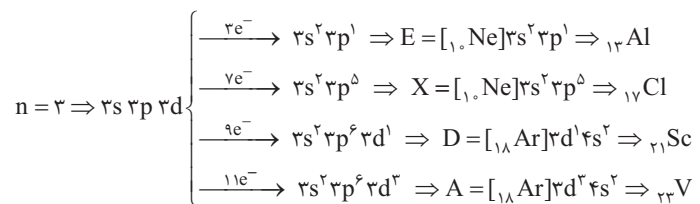
۷۵ - گزینه ۴

در مرحله تخلیه در حالی که پیستون در پایین‌ترین وضعیت قرار دارد، سوپاپ دریچه خروجی باز می‌شود و قسمتی از محصولات احتراق به صورت دود از دریچه خروجی خارج می‌شود، تا این که فشار گاز داخل استوانه با فشار جو یکسان شود. در این مرحله پیستون ساکن است. در نتیجه فرایند تخلیه در حجم ثابت انجام می‌گیرد.

شیمی

۷۶ - گزینه ۳

ابتدا باید تکلیف عنصرها را مشخص کنیم:



بررسی گزینه‌ها: ۱ اتم D همان ${}_{21}\text{Sc}$ است که با تشکیل کاتیون سه بار مثبت به آرایش گاز نجیب آرگون می‌رسد. ${}_{21}\text{Sc}: [1s^2] 3s^2 3p^6 3d^1 \Rightarrow {}_{21}\text{Sc}^{3+}: [1s^2] 3s^2 3p^6$

۲ عنصر E همان آلومینیم است که در واکنش آن با اکسیژن، آلومینیم اکسید (Al_2O_3)، تشکیل می‌شود. نسبت شمار آنیون به کاتیون در این ترکیب با نسبت شمار کاتیون به آنیون در منیزیم فسفات ($\text{Mg}_3(\text{PO}_4)_2$) یکسان و برابر $\frac{3}{2}$ است.

۳

نکته محلول ترکیب برخی فلزهای واسطه از جمله وانادیم (${}_{23}\text{V}$) به رنگ‌های

رنگ	محلول
زرد	نمک وانادیم (V)
آبی	نمک وانادیم (IV)
سبز	نمک وانادیم (III)
بنفش	نمک وانادیم (II)

گونگون دیده می‌شوند. وانادیم دارای عدد اکسایش صفر، در حالت آزاد و عنصری و دارای عددهای اکسایش ۲ (II)، ۳ (III)، ۴ (IV) و ۵ (V) در حالت ترکیب با دیگر عنصرها است. رنگ نمک‌های مختلف وانادیم در این عددهای اکسایش، این‌طور است:

عنصر A همان وانادیم است که بالاترین عدد اکسایش آن $+5$ است اما محلول آن در این عدد اکسایش، زرد رنگ است.

۴ عدد اتمی X، (${}_{17}\text{Cl}$) برابر ۱۷ است. این عنصر در دوره سوم قرار دارد و فلز قلیایی هم‌دوره‌اش، ${}_{11}\text{Na}$ می‌باشد. تفاوت عدد اتمی این دو عنصر برابر $17 - 11 = 6$ است. تفاوت عدد اتمی عنصرهای E، (${}_{13}\text{Al}$) و D (${}_{21}\text{Sc}$) برابر ۸ می‌باشد.

۷۷ - گزینه ۳

درس‌نامه ترتیب جداسدن گازها از هوای مایع:

۱ اگر مقایسه نقطه جوش دو ماده گازی A و B به صورت $A > B$ باشد، هنگام مایع کردن این دو گاز، ابتدا A که نقطه جوش بالاتری دارد، مایع می‌شود، ولی اگر بخواهیم A و B مایع را به گاز تبدیل کنیم، ابتدا B که نقطه جوش پایین‌تری دارد، به گاز تبدیل می‌شود.

۲ ترتیب نقطه جوش چهار گاز هوا که شما باید به‌دین به صورت زیر است:

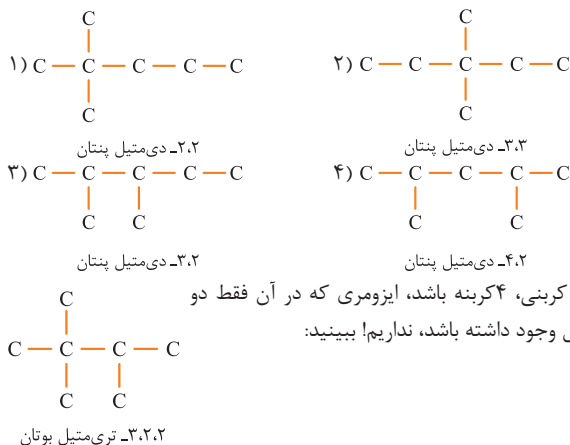
مقایسه نقطه جوش: $\text{He} < \text{N}_2 < \text{Ar} < \text{O}_2$
 $-269^{\circ}\text{C} \quad -196^{\circ}\text{C} \quad -186^{\circ}\text{C} \quad -183^{\circ}\text{C}$

۳ اگر نمونه‌ای از هوای مایع با دمای $^{\circ}\text{C}$ -200 را وارد برج تقطیر کنیم، ترتیب جداسدن گازها این‌طور است:

ترتیب جداسدن گازها: $\text{N}_2 \Rightarrow \text{Ar} \Rightarrow \text{O}_2$
 (۱) (۲) (۳)

گزینه ۲ - ۷۹

هیپتان آلکانی ۷ کربنه (C_7H_{16}) است. برای رسم هم‌پارها یا ایزومرهایی که در آن ۲ شاخه فرعی متیل ($-CH_3$) وجود داشته باشد، زنجیر اصلی کربنی حداکثر می‌تواند ۵ کربنه باشد و ساختارهای زیر را دارا باشد:

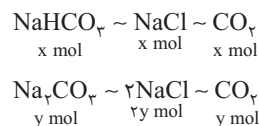


گزینه ۱ - ۸۰

استراتژی برای قسمت اول سؤال، تعداد مول $NaHCO_3$ و Na_2CO_3 را به ترتیب X و Y در نظر بگیر و با توجه به اطلاعات داده‌شده و معادله واکنش‌ها، X و Y را به دست بیار و بعد جرم جوش شیرین ($NaHCO_3$) و مخلوط را محاسبه و درصد جرمی جوش شیرین را به دست بیار! برای قسمت دوم سؤال هم، مجموع مول $NaCl$ تولیدی در دو واکنش رو به دست بیار و به کمک جرم مولی، اونو به جرم تبدیل کن.

نکته در یک مخلوط گازی، درصد و نسبت حجمی گازها با درصد و نسبت مولی آن‌ها برابر است؛ مثلاً اگر درصد حجمی گاز A، ۴۰٪ باشد، می‌توان گفت درصد مولی آن برابر ۴۰٪ است.

گام ۱ اگر تعداد مول $NaHCO_3$ و Na_2CO_3 را به ترتیب X و Y در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$Na_2CO_3 \text{ و } NaHCO_3 \text{ مول مجموع } = x + y = 0.35$$

$$\begin{aligned} \text{حجم } CO_2 \text{ در واکنش اول} &= \frac{75}{100} \times \text{حجم } CO_2 \text{ در واکنش دوم} \\ \text{مول } CO_2 \text{ در واکنش اول} &= \frac{75}{100} \times \text{مول } CO_2 \text{ در واکنش دوم} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = 0.75x \Rightarrow x + 0.75x = 0.35 \Rightarrow 1.75x = 0.35 \Rightarrow x = 0.2$$

$$\Rightarrow y = 0.75 \times 0.2 = 0.15$$

گام ۲ جرم جوش شیرین ($NaHCO_3$) و جرم کل مخلوط اولیه را به دست می‌آوریم:

$$NaHCO_3 \text{ جرم مولی } = 84 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 23 + 1 + 12 + (3 \times 16)$$

$$Na_2CO_3 \text{ جرم مولی } = 106 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = (2 \times 23) + 12 + (3 \times 16)$$

$$NaHCO_3 \text{ جرم مولی } \times \text{مول} = \text{جرم} \Rightarrow NaHCO_3 \text{ جرم} = 0.2 \times 84 = 16.8 \text{ g}$$

$$Na_2CO_3 \text{ جرم} = 0.15 \times 106 = 15.9 \text{ g}$$

$$\text{جرم کل مخلوط اولیه} = 16.8 + 15.9 = 32.7 \text{ g}$$

گام ۳ درصد جرمی جوش شیرین را حساب می‌کنیم:

$$\% \text{ جرم جوش شیرین} = \frac{\text{جرم } NaHCO_3}{\text{جرم مخلوط}} \times 100 = \frac{16.8}{32.7} \times 100 = 51.4\%$$

گام ۴ جرم کل نمک ($NaCl$) تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$NaCl \text{ مول} = x + 2y = 0.2 + (2 \times 0.15) = 0.5 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow NaCl \text{ جرم} = 0.5 \times 58.5 = 29.25 \text{ g}$$

تله اگر به اشتباه فرمول جوش شیرین را Na_2CO_3 در نظر می‌گرفتیم، برای قسمت اول سؤال به عدد ۴۸/۶ می‌رسیدید.

گزینه ۳ - ۸۱

استراتژی با توجه به دسته‌بندی جدول تناوبی، الکترون‌های ظرفیت هر یک از عناصر دسته‌های s، d، p، دوره چهارم جدول تناوبی رو بررسی کن تا عنصر مورد نظر مشخص بشه. البته با کمی زرنگی از روی گزینه‌ها هم می‌تونی این عنصر رو پیدا کنی.

نکته برای به دست آوردن $n + l$ الکترون‌های یک زیرلایه، باید تعداد الکترون‌های آن زیرلایه (توان زیرلایه) نیز در مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی آن ضرب شود.

$$nl^y : (n+l) \times y \xrightarrow{\text{مثال}} 4s^2 : (4+0) \times 2 = 8$$

از آن‌جا که در دوره چهارم، عناصر سه دسته s، p، d حضور دارند، هر سه حالت را بررسی می‌کنیم:

۸ یا ۴ = مجموع $n + l$ یا $4s^2$ یا $4s^1$: الکترون‌های ظرفیت $\rightarrow$ عنصر دسته s: حالت اول

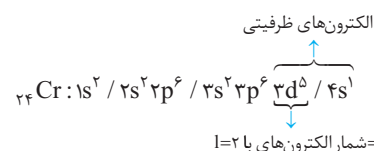
۴ یا ۴ = مجموع $n + l$: الکترون‌های ظرفیت $\rightarrow$ عنصر دسته p: حالت دوم

غیر قابل قبول $x = 4/2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 29 = 8 + 5x \Rightarrow x = 5$

۳ یا ۳ = مجموع $n + l$: الکترون‌های ظرفیت $\rightarrow$ عنصر دسته d: حالت سوم

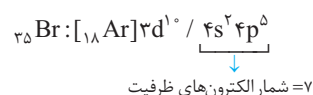
$$\begin{cases} y=1 \rightarrow 5x+4=29 \Rightarrow x=5 \\ y=2 \rightarrow 5x+8=29 \Rightarrow x=4/2 \end{cases}$$

بنابراین عنصر مورد نظر، عنصر کروم (Cr) با آرایش الکترونی زیر است:



تیزبازی شاید به دست آوردن عنصر مورد نظر کمی براتون سخت باشه، اما می‌تونید با استفاده از گزینه‌ها بهش برسید: ① و ② ویژگی‌های عنصر کروم Cr رو بیان می‌کنن و از اون جایی که این سؤال فقط یک گزینه نادرست داره، پس این دو گزینه نمی‌تونن با هم غلط باشن، پس عبارت‌های درستی هستن و عنصر مورد نظر کروم است.

آرایش الکترونی اتم عنصر برم (Br) به صورت زیر است:



بررسی سایر گزینه‌ها: ① عنصر کروم (Cr) در گروه ۶ جدول دوره‌ای قرار دارد و جزء فلزات واسطه (دسته d) دوره چهارم است. ② طبق داده‌های طیف‌سنجی، آرایش الکترونی اتم برخی از عناصر از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند. برای نمونه هر یک از اتم‌های کروم (Cr) و مس (Cu) در بیرونی‌ترین زیرلایه خود تنها یک الکترون دارد. ($4s^1$) ④ شمار الکترون‌های ظرفیتی در اتم عنصر کروم (Cr) برابر ۶ است. در گروه ۱۴ جدول تناوبی دو عنصر شبه‌فلزی (Si ، Ge) وجود دارد و سه برابر ۲ می‌شه ۶!

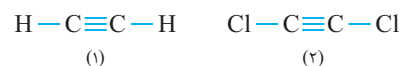
گزینه ۱ - ۸۲

نکته ① برای پیوندهایی که حداقل ۲ و یا تعداد بیشتری از آن‌ها می‌تواند در یک مولکول وجود داشته باشد، اطلاق نام میانگین آنتالپی پیوند مناسب‌تر است.

② آنتالپی پیوند به نوع مولکول دارای آن پیوند هم بستگی دارد؛ مقدار آنتالپی پیوند برای یک نوع معین از پیوند، در انواع مولکول‌های دارای آن پیوند، متفاوت است.

در مولکول‌های دواتمی مانند HCl ، N_2 و Br_2 فقط و فقط! یک نوع پیوند اشتراکی وجود دارد؛ بنابراین استفاده از واژه میانگین آنتالپی پیوند برای پیوندهای موجود در آن‌ها ($Br-Br$ و $N \equiv N$ ، $H-Cl$) لازم نیست!

در پیوند سه‌گانه کربن با کربن یعنی $C \equiv C$ ، هر دو کربن هنوز باید یک پیوند اشتراکی دیگر داشته باشند تا پایدار شوند، به همین خاطر ترکیب‌های متفاوتی وجود دارند که دارای $C \equiv C$ هستند، مثل اینا:



در ترکیب شماره (۱) به هر اتم کربن، یک اتم هیدروژن وصل شده در حالی که در ترکیب شماره (۲) به هر اتم کربن، یک اتم کلر وصل شده است. کاملاً واضح است که این دو اتم (H و Cl)

از زمین تا آسمون با هم فرق دارن! بنابراین قدرت پیوند $C \equiv C$ در این دو ترکیب با هم متفاوت است. تفاوت در قدرت پیوند هم یعنی تفاوت در آنتالپی پیوند! به همین دلیل برای پیوند $C \equiv C$ استفاده از نام «میانگین آنتالپی پیوند» مناسب‌تر است.

۸۳- گزینه ۲

فرمول مولکولی هر دو ترکیب A و C، C_4H_6O است؛ از این‌رو ایزومر یکدیگر به شمار می‌روند. از آن‌جا که ترکیب C می‌تواند با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی برقرار کند، نقطه جوش بالاتری نسبت به ترکیب A دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) دو ترکیب B و D با فرمول مولکولی C_8H_{16} ایزومر یکدیگرند اما محتوای انرژی یکسانی ندارند.

۳) ساده‌ترین عضو خانواده کتون‌ها، استون $(CH_3-C(=O)-CH_3)$ است که مانند ترکیب A، اتم هیدروژن دارد.

۴) ساده‌ترین عضو خانواده آلدهیدها، $H-C(=O)-H$ است: CH_4O جرم مولی CH_4O = جرم مولی CH_4 + جرم مولی O = ۱۶ g

۸۴- گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها: ۱) عنصرهای گروه ۲ (X_2) و ۱۶ (X_2O) در آرایش الکترون - نقطه‌ای خود دارای ۲ الکترون جفت‌نشده هستند. در سه دوره اول، در مجموع ۴ عنصر در گروه‌های ۲ و ۱۶ (S و O , Mg , Be) وجود دارند. دقت کنید که هلیوم با این‌که دو الکترون ظرفیتی دارد، اما در آرایش الکترون - نقطه‌ای آن (He) الکترون جفت‌نشده وجود ندارد.

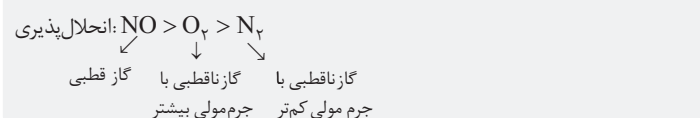
نکته انرژی زیرلایه به $n + l$ و آن‌ها بستگی دارد؛ به طوری که هر چه مقدار $n + l$ برای یک زیرلایه بیشتر باشد، انرژی آن بیشتر است. در صورتی که مقدار $n + l$ برابر باشد، زیرلایه‌ای که n بیشتری دارد، انرژی بیشتری دارد.

۲) مقدار $n + l$ سه زیرلایه $4f$ ، $5d$ و $6p$ یکسان و برابر ۷ بوده و در نتیجه با توجه به مقدار n ، مقایسه انرژی زیرلایه‌های داده‌شده به صورت مقابل است: $6p > 5d > 4f$. ترتیب انرژی زیرلایه‌ها ۳) عنصر تکنسیم (Tc)، نخستین عنصر ساخت بشر است. با توجه به این‌که عناصر دوره پنجم دارای اعداد اتمی ۳۷ تا ۵۴ (بین گاز نجیب Kr تا گاز نجیب Xe) هستند، این عنصر در دوره پنجم جدول دوره‌ای قرار دارد. توجه کنید که عناصر دسته d در دوره پنجم جدول دوره‌ای از عدد اتمی ۳۹ شروع می‌شوند و عنصر تکنسیم (Tc)، پنجمین عنصر دسته d (عنصر واسطه) در این دوره محسوب می‌شود.

۴) درصد فراوانی ایزوتوپ ^{235}U در مخلوط طبیعی ایزوتوپ‌های عنصر اورانیم، کمتر از ۷٪ درصد است؛ در نتیجه کمتر از ۳/۵٪ $\frac{7 \times 50}{100} = 3.5$ اتم در هر ۵۰ اتم اورانیم، از نوع ^{235}U است.

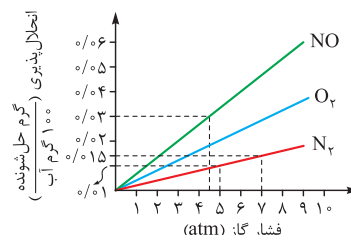
۸۵- گزینه ۲

نکته در مورد گازهایی که با آب واکنش نمی‌دهند، در دما و فشار یکسان، انحلال پذیری گازهای قطبی از گازهای ناقطبی (با جرم مولی نزدیک به هم) بیشتر است. در بین گازهای ناقطبی، هر چه جرم مولی بیشتر باشد، انحلال پذیری گاز در آب بیشتر است:



عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند. در نمودار داده‌شده، خط‌ها از بالا به پایین به ترتیب مربوط به NO ، O_2 و N_2 هستند.

بررسی عبارت‌ها:



(الف) هر گازی که شیب نمودار انحلال‌پذیری آن در آب بیشتر باشد، تأثیر فشار بر انحلال‌پذیری آن بیشتر است.

تأثیر فشار بر انحلال پذیری گاز: $NO > O_2 > N_2$ (ناقطبی)

(ب) با توجه به نمودار، میزان انحلال‌پذیری گاز نیتروژن (N_2) در فشار ۷ اتمسفر و در دمای $20^\circ C$ ، تقریباً برابر ۰/۱۵ گرم در ۱۰۰ گرم آب است؛ در نتیجه در این شرایط، می‌توانیم حداکثر مقدار گاز نیتروژن که می‌تواند در ۳۰۰ گرم آب حل شده و محلول سیرشده‌ای ایجاد کند را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$g N_2 = 300 \text{ g آب} \times \frac{0.15 \text{ g } N_2}{100 \text{ g آب}} = 0.45 \text{ g } N_2$$

(پ) با توجه به نمودار، انحلال‌پذیری گاز نیتروژن (N_2) در فشار ۵ اتمسفر و در دمای $20^\circ C$ ، تقریباً برابر ۰/۱۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. از طرفی دیگر می‌دانیم که انحلال‌پذیری گازها، با افزایش مقدار نمک در آب کاهش می‌یابد؛ در نتیجه داریم:

انحلال‌پذیری گاز N_2 در ۱۰۰ گرم محلول ۱٪ مولار $NaCl$ $<$ ۰/۱۱ g

(ت) با توجه به نمودار انحلال‌پذیری گاز NO در فشار ۴/۵ اتمسفر و در دمای $20^\circ C$ ، تقریباً برابر ۰/۰۳ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. برای محاسبه غلظت مولی محلول سیرشده گاز NO در این شرایط، می‌توانیم حجم محلول را تقریباً برابر حجم آب (حلال) در نظر بگیریم؛ لذا با توجه به چگالی آب، غلظت مولی محلول سیرشده گاز NO را در این شرایط محاسبه می‌کنیم:

روش

$$\frac{m}{V} = \frac{\frac{0.3}{100} \text{ g آب} \times \frac{1 \text{ mL آب}}{1 \text{ g آب}} \times \frac{1 \text{ آب}}{10^3 \text{ mL آب}}}{100 \text{ g آب}} = \frac{0.3}{100 \times 10^3} \text{ mol.L}^{-1} = 0.003 \text{ mol.L}^{-1}$$

نکته انحلال‌پذیری گازها در آب ناچیز است؛ بنابراین می‌توان جرم محلول را با جرم آب و درصد جرمی محلول را با مقدار انحلال‌پذیری گاز برابر در نظر گرفت. با توجه به این‌که چگالی محلول به تقریب معادل چگالی آب (1 g.mL^{-1}) است، خواهیم داشت:

$$\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} = \frac{10 \times S}{\text{جرم مولی}}$$

$$\Rightarrow \frac{10 \times S}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 0.3}{100} = 0.03 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{10 \times S}{M} = \frac{10 \times 0.3}{100} = 0.03 \text{ mol.L}^{-1}$$

۸۶- گزینه ۳

استراتژی برای قسمت اول سؤال، با توجه به این‌که فرمول یون نیترات به صورت NO_3^- و آهن دارای کاتیون‌های Fe^{2+} و Fe^{3+} است، فرمول نمک را به صورت $Fe(NO_3)_n$ در نظر بگیر و با توجه به غلظت یون نیترات در محلول و رابطه بین جرم نمک و جرم یون نیترات، n رو به دست بیا! برای قسمت دوم سؤال هم با توجه به جرم محلول و مقدار نمک موجود در آن، شمار یون‌های آهن را در ۱ گرم محلول به دست بیا.

روش ابتدا با استفاده از فرمول ppm، جرم یون نیترات موجود در محلول را به دست می‌آوریم:

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم نیترات}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 992 = \frac{\text{جرم نیترات}}{250} \times 10^6 \Rightarrow \text{جرم نیترات} = 248 \times 10^{-3} \text{ g } NO_3^-$$

حالا باید از جرم نیترات به جرم نمک موجود در محلول $Fe(NO_3)_n$ برسیم:

$$248 \times 10^{-3} \text{ g } NO_3^- \times \frac{1 \text{ mol } NO_3^-}{62 \text{ g } NO_3^-} \times \frac{1 \text{ mol } Fe(NO_3)_n}{n \text{ mol } NO_3^-} \times \frac{(56 + 62n) \text{ g } Fe(NO_3)_n}{1 \text{ mol } Fe(NO_3)_n} = 90$$

$$56 + 62n = 90 \Rightarrow 62n = 34 \Rightarrow n = 0.55 \Rightarrow n = 2$$

آهن (II) نیترات $\Rightarrow Fe(NO_3)_2$

برای این که بدوینیم با افزایش n درصد جرمی کربن چه تغییری می‌کند، کافی است که درصد جرمی کربن در دو آلکان اولیه را حساب کنیم:

$$\text{CH}_4 \text{ درصد جرمی کربن در } = \frac{12}{16} \times 100 = 75\%$$

$$\text{C}_2\text{H}_6 \text{ درصد جرمی کربن در } = \frac{2 \times 12}{30} \times 100 = 80\%$$

با افزایش n درصد جرمی کربن در آلکان‌ها افزایش می‌یابد. به نظرتون در نهایت درصد جرمی کربن به چه عددی می‌تونه برسه؟! اگر از درس ریاضی کمک بگیرید و حد $\frac{12n}{14n+2}$ رو حساب کنید ($n \rightarrow \infty$)، متوجه خواهید شد که درصد جرمی کربن در آلکان‌ها نهایتاً می‌تواند به درصد جرمی کربن در آلکن‌ها (حدود 85.7%) برسد. بداند و آگاه باشید که درصد جرمی هیدروژن در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن کاهش می‌یابد و نهایتاً به درصد جرمی هیدروژن در آلکن‌ها (حدود 14.3%) می‌رسد.

بیش از 90% درصد نفت خام مصرفی در دنیا، صرف سوزاندن و تأمین انرژی می‌شود که حدود نیمی از نفت یا تقریباً 50% درصد آن، به عنوان سوخت در وسایل نقلیه و بخش اعظم نیم دیگر نفت یا تقریباً 40% درصد آن، برای تأمین گرما و انرژی الکتریکی مورد نیاز ما استفاده می‌شود.

۸۹ - گزینه ۲

شفاف‌سازی: HCl و KOH هر دو به ترتیب اسید و باز قوی هستند. پس از واکنش HCl با KOH ، pH محلول برابر با 13 شده است نه 7 ؛ بنابراین مقدار KOH بیشتر از HCl بوده و همه KOH خنثی نشده است.

با اضافه کردن HCl به محلول KOH ، مقدار از OH^- محلول باز با H^+ حاصل از یونش HCl خنثی می‌شود که سؤال گفته بعد از این خنثی شدن، pH محلول 13 شده؛ پس ابتدا به کمک pH محلول، $[\text{OH}^-]$ را در محلول نهایی حساب می‌کنیم:

$$\text{pH} = 13 \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-13} \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-13}} = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

با داشتن $[\text{OH}^-]$ محلول نهایی، شمار مول‌های KOH باقی‌مانده در محلول را محاسبه می‌کنیم. از آن‌جا که KOH یک باز قوی یک‌ظرفیتی است، داریم:

$$[\text{OH}^-] = M = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

حجم محلول 200 mL است:

$$\text{تعداد مول‌های KOH} = \frac{\text{غلظت مولی (M)} \times \text{حجم محلول بر حسب لیتر}}{1000} = \frac{10^{-1} \times 200}{1000} = 0.02 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مول‌های KOH} = 0.02 \text{ mol}$$

در نتیجه پس از انجام واکنش خنثی شدن، 0.02 mol KOH در محلول باقی مانده است.

حالا حساب می‌کنیم که $44/8 \text{ mL}$ گاز HCl با چند مول KOH واکنش می‌دهد:

$$\text{HCl} + \text{KOH} \rightarrow \text{KCl} + \text{H}_2\text{O}$$

$$44/8 \text{ mL HCl} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{22400 \text{ mL HCl}} \times \frac{1 \text{ mol KOH}}{1 \text{ mol HCl}} = 0.002 \text{ mol}$$

پس 0.002 mol KOH با $44/8 \text{ mL}$ میلی‌لیتر گاز HCl خنثی شده و در نهایت 0.02 mol KOH در محلول باقی مانده؛ بنابراین در ابتدا 0.022 mol KOH داشته‌ایم. این مقدار KOH در 5 mL میلی‌لیتر محلول وجود داشته، پس غلظت اولیه KOH برابر است با:

$$M = \frac{\text{تعداد مول‌های حل‌شده}}{\text{حجم محلول بر حسب لیتر}} = \frac{0.022}{0.005} = 4.4 \text{ mol.L}^{-1}$$

حالا می‌تونیم به کمک فرمول ($M = \frac{10 \text{ ad}}{\text{جرم مولی}}$) غلظت مولی، درصد جرمی KOH را حساب کنیم:

$$M = \frac{10 \text{ ad}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow 4.4 = \frac{10 \times a \times 2/8}{56} \Rightarrow a = 8/8$$

برای حل قسمت دوم سؤال، با استفاده از کسر تبدیل مناسب می‌نویسیم:

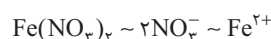
$$1 \text{ g محلول} \times \frac{0.36 \text{ g Fe(NO}_3)_2}{250 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol Fe(NO}_3)_2}{180 \text{ g Fe(NO}_3)_2} \times \frac{1 \text{ mol Fe}^{2+}}{1 \text{ mol Fe(NO}_3)_2} = 8 \times 10^{-6} \times 6.02 \times 10^{23} = 4.816 \times 10^{18} \text{ Fe}^{2+}$$

با استفاده از کسر تناسب می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{تعداد مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0.36}{56 + 62n} = \frac{250 \times 992 \times 10^{-6}}{n \times 62}$$

$$\Rightarrow \frac{0.36}{56 + 62n} = \frac{4}{1000n} \Rightarrow \frac{36}{56 + 62n} = \frac{4}{1000n} \Rightarrow 56 + 62n = 900n$$

$$\Rightarrow 28n = 56 \Rightarrow n = 2$$



$$\frac{\text{تعداد ذره}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{1 \times 992 \times 10^{-6}}{2 \times 62} = \frac{\text{تعداد ذره های Fe}^{2+}}{6.02 \times 10^{23}}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد ذره های Fe}^{2+} = 8 \times 10^{-6} \times 6.02 \times 10^{23} = 4.816 \times 10^{18}$$

۸۷ - گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها: تنها نافلز جدول دوره‌ای، برم (Br) است که در دوره چهارم جدول تناوبی قرار دارد. در این دوره، تنها یک عنصر گازی وجود دارد که همان گاز نجیب کریپتون (Kr) با واکنش‌پذیری ناچیز است.

در گروه 14 جدول دوره‌ای، اتم عناصر کربن (C)، سیلیسیم (Si) و ژرمانیم (Ge) در واکنش با اتم دیگر عناصر، تنها الکترون به اشتراک می‌گذارند اما دقت کنید که فلزهای قلع (Sn) و سرب (Pb) از این گروه، می‌توانند یون‌های تک‌اتمی با بارهای $+2$ یا $+4$ تشکیل دهند.

در گروه دوم جدول دوره‌ای یا گروه فلزهای قلیایی خاکی، مشابه گروه‌های دیگر، از بالا به پایین، شعاع اتمی عناصرها افزایش می‌یابد، زیرا تعداد لایه‌های الکترونی اتم آن‌ها بیشتر می‌شود. همچنین، بار مثبت هسته عناصرها به دلیل افزایش عدد اتمی یا همان تعداد پروتون‌های عنصر، در یک گروه از بالا به پایین، افزایش می‌یابد.

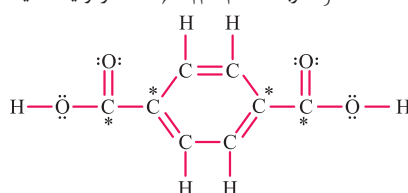
با مشخص شدن جایگاه یک عنصر در جدول دوره‌ای، دسته آن عنصر (s , p , d یا f) مشخص می‌شود که عناصرهای مختلف بنا بر زیرلایه در حال پرشدن اتم خود، در این دسته مختلف قرار می‌گیرند.

۸۸ - گزینه ۱

بررسی گزینه‌ها:

۱) کربوکسیلیک اسیدها و استرها یک‌عاملی که شمار اتم‌های کربن یکسانی دارند، ایزومر یا همپار یکدیگر هستند؛ بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} &\text{اتیل بوتانوات: استر سازنده بوی آناناس} \\ &\text{۶کربنه} \Rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_4 \\ &\text{۶کربنه} \Rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{این دو ترکیب، همپار هستند.}$$



۲) در ساختار مولکول ترفتالیک اسید، چهار اتم کربن با هیچ اتم هیدروژنی پیوند اشتراکی ندارند:

$$\text{درصد جرمی کربن در آلکان‌ها (C}_n\text{H}_{2n+2}) = \frac{12n}{14n+2} \times 100$$



(الف) ضریب هر دو فرآورده در واکنش (I) برابر است؛ بنابراین سرعت تولید آن‌ها و شیب نمودار مول - زمان آن‌ها، با هم برابر است.

(ب) در واکنش (I)، ضریب O_2 ، برابر H_2S است و نه دو برابر!

(پ) درسته! زیرا بزرگ‌ترین ضریب در واکنش (II)، متعلق به H_2O است که جزء فرآورده‌های باشد. (ت) درسته که ضریب O_2 کم‌تر از ضریب As است، اما **هواستون باشه** که ضرایب در یک معادله موازنه‌شده، نسبت تغییر تعداد مول مواد نسبت به هم را نشان می‌دهند و نه نسبت تعداد مول آن‌ها! مثلاً فرض کنید در ابتدا ۳ مول O_2 در ظرف وارد شده است؛ اگر پس از مدتی ۱ مول O_2 مصرف شود، تعداد مول O_2 به $3-1=2$ می‌رسد؛ از طرفی با توجه به معادله واکنش، به ازای مصرف ۱ مول O_2 ، $\frac{4}{3}$ مول As تولید می‌شود. پس طی این زمان، تعداد مول O_2 بیشتر از تعداد مول As خواهد شد.



گزینه ۹۳

استراتژی برای به دست آوردن جرم آهن باقی‌مانده، ابتدا جرم آهن مصرف‌شده در ۴۰ ثانیه ابتدایی را از روی سرعت گاز هیدروژن به دست آورده و مقدار حاصل را از جرم اولیه آهن کم کن!



روش جرم فلز آهن مصرف‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$40s \times \frac{0.04 \text{ mol } H_2}{1s} \times \frac{3 \text{ mol } Fe}{4 \text{ mol } H_2} \times \frac{56 \text{ g } Fe}{1 \text{ mol } Fe} = \frac{40 \times 0.04 \times 3 \times 56}{4} = 67.2 \text{ g } Fe$$

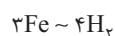
گام جرم فلز آهن باقی‌مانده در ظرف واکنش را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم فلز آهن مصرف‌شده} - \text{جرم فلز آهن اولیه} = \text{جرم فلز آهن باقی‌مانده}$$

$$= 152/8 - 67.2 = 85.6 \text{ g } Fe$$

روش اگر از کسر تناسب برای حل مسائل استفاده می‌کنید باید مراحل زیر را طی کنید:

$$R = \frac{\Delta n}{\Delta t} \Rightarrow 0.04 = \frac{\Delta n}{40} \Rightarrow \Delta n = 1.6 \text{ mol}$$



$$\frac{x}{3 \times 56} = \frac{1.6}{4} \Rightarrow x = 67.2$$

$$\text{جرم فلز آهن مصرف‌شده} - \text{جرم فلز آهن اولیه} = \text{جرم فلز آهن باقی‌مانده}$$

$$= 152/8 - 67.2 = 85.6 \text{ g } Fe$$



گزینه ۹۴

درس‌نامه

رابطه بین K_a و α : وقتی می‌گوییم درجه یونش اسید ضعیف HA برابر α است، یعنی اگر غلظت اولیه اسید، M باشد، به اندازه $M\alpha$ یونیده شده است و غلظت تعادلی آن برابر با $M - M\alpha$ خواهد بود؛ پس می‌توان نوشت:

	$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$		
غلظت اولیه	M	0	0
تغییر غلظت	$-M\alpha$	$+M\alpha$	$+M\alpha$
غلظت تعادلی	$M - M\alpha$	$M\alpha$	$M\alpha$

$$\Rightarrow K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M - M\alpha} = \frac{M\alpha^2}{M(1-\alpha)} = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}$$

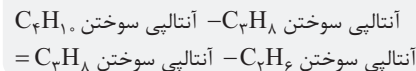
بنابراین برای اسیدهای ضعیف مانند HA رابطه زیر برقرار است:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{K_a < 10^{-4} \text{ یا } \alpha < 5\%} K_a \approx M\alpha^2$$



گزینه ۹۰

درس‌نامه دو عضو متوالی آلکان‌ها در یک گروه CH_4 با هم تفاوت دارند؛ بنابراین اختلاف آنتالپی سوختن دو عضو متوالی آلکان‌ها با هم برابر بوده و برابر با آنتالپی سوختن یک گروه CH_4 است. مثال:



استراتژی اختلاف آنتالپی سوختن دو هیدروکربن متوالی به دلیل تفاوت در گروه CH_4 است؛ پس کافیه اختلاف آنتالپی سوختن اتان و پروپان رو حساب کنی تا آنتالپی سوختن یک گروه CH_4 رو به دست بیاری. با اضافه کردن ۳ گروه CH_4 به پروپان، هگزان حاصل می‌شود، پس کافیه آنتالپی سوختن ۳ گروه CH_4 رو به آنتالپی سوختن پروپان اضافه کنی تا به آنتالپی سوختن هگزان برسی و بتونی خواسته سؤال رو محاسبه کنی.

گام اتان و پروپان در یک گروه CH_4 با هم اختلاف دارند؛ پس می‌توان نوشت:

$$\Delta H_{\text{سوختن}}(CH_4) = \text{آنتالپی سوختن پروپان} - \text{آنتالپی سوختن اتان}$$

$$= -2230 - (-1560) = -670 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

گام هگزان (C_6H_{14}) در سه گروه CH_4 با پروپان (C_3H_8) اختلاف دارد.

$$\Delta H_{\text{سوختن}}(CH_4) = \text{آنتالپی سوختن پروپان} - \text{آنتالپی سوختن اتان}$$

$$= -2230 + 3(-670) = -4240 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

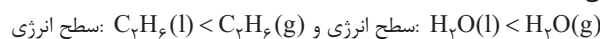
گام از سوختن ۱ مول هگزان، ۴۲۴۰ کیلوژول گرما آزاد می‌شود؛ پس گرمای آزادشده به ازای سوختن ۱۷/۲ گرم از آن برابر است با:

$$17/2 \text{ g } C_6H_{14} \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{14}}{86 \text{ g } C_6H_{14}} \times \frac{4240 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } C_6H_{14}} = 848 \text{ kJ}$$



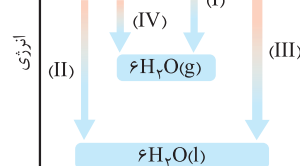
گزینه ۹۱

گام سطح انرژی یک ماده در حالت مایع پایین‌تر از سطح انرژی همان ماده در حالت گاز است؛ یعنی:



گام از آن‌جا که نیروهای بین مولکولی در اتان (وان‌دروالس)، ضعیف‌تر از نیروهای بین مولکولی در آب (پیوند هیدروژنی) هستند، آنتالپی تبخیر اتان از آنتالپی تبخیر آب کم‌تر است؛ یعنی برای تبخیر ۲ مول اتان ($2C_2H_6(l) \rightarrow 2C_2H_6(g)$) در مقایسه با تبخیر ۶ مول آب ($6H_2O(l) \rightarrow 6H_2O(g)$)، گرمای کم‌تری لازم است.

گام پس نمودار انرژی ۴ واکنش سؤال با توجه به تفاوت حالت فیزیکی مواد به صورت مقابل است:



$$\text{مقایسه مقدار عددی گرمای آزادشده: } Q_{(III)} > Q_{(II)} > Q_{(I)} > Q_{(IV)}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{واکنش‌ها به ازای ۱ گرم اتان} \quad 52 \quad 51/43 \quad 47/6 \quad 47/0.2$$

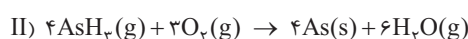
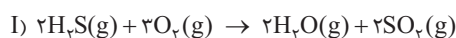


گزینه ۹۲

نکته با استفاده از ضرایب استوکیومتری مواد در یک واکنش:

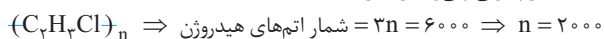
(الف) می‌توان سرعت متوسط مصرف یا تولید و یا همان شیب نمودار مول یا غلظت - زمان آن‌ها را با هم مقایسه کرد. (ب) نمی‌توان مقدار مول مواد را در هر لحظه مقایسه کرد و فقط مقدار مول مصرفی یا تولیدی آن‌ها را می‌توان مقایسه کرد.

عبارات‌های «الف» و «ب» درست‌اند.



۹۵- گزینه ۱

محاسبه جرم مولی پلی وینیل کلرید:



$$\Rightarrow 2000 \times C_2H_3Cl = 2000 \times 62.5 = 125000 \text{ g.mol}^{-1}$$

محاسبه جرم مولی پلی پروپین:

$$(C_3H_5)_n \sim 3nCO_2$$

$$\frac{\text{جرم مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{125000}{3} = \frac{3n \times 44}{1} \Rightarrow n = \frac{9000}{3} = 3000$$

$$n \times C_3H_5 = 3000 \times 42 = 126000 \text{ g.mol}^{-1}$$

محاسبه نسبت جرم مولی پلی پروپین به پلی وینیل کلرید:

$$\frac{\text{جرم مولی پلی پروپین}}{\text{جرم مولی پلی وینیل کلرید}} = \frac{3000 \times 42}{125000} = \frac{3 \times 42}{125} = \frac{126}{125} \approx 1$$

۹۶- گزینه ۴

عبارت‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم درست هستند.

بررسی عبارت‌ها: فرمول کلی صابون‌های جامد و مایع می‌تواند به ترتیب،

RCOONa و RCOOK باشد که در این دو صابون، R نشان‌دهنده گروه هیدروکربنی بلند زنجیر می‌باشد؛ بنابراین ترکیب a، نوعی صابون مایع محسوب می‌شود ولی ترکیب c به علت داشتن زنجیر هیدروکربنی بسیار کوچک، صابون به شمار نمی‌آید.

ترکیب b، پاک‌کننده غیرصابونی است که فرمول کلی این پاک‌کننده‌ها، $RC_6H_4SO_3^-Na^+$ می‌باشد. پاک‌کننده‌های غیرصابونی با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} تشکیل رسوب نمی‌دهند و خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند؛ در صورتی که ترکیب a با توجه به توضیحات داده‌شده، پاک‌کننده صابونی است و این پاک‌کننده‌ها با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} تشکیل رسوب می‌دهند.

فرمول زنجیرهای هیدروکربنی ترکیب d به صورت $C_{17}H_{33}$ بوده و با توجه به شمار اتم‌های هیدروژن در گروه سیرشده آلکیل (C_nH_{2n+1}) هم‌کربن آن ($C_{17}H_{35}$)، در ساختار آن‌ها

$$\frac{35-33}{2} = 1 \text{ پیوند دوگانه وجود دارد؛ بنابراین ترکیب d، یک استر سنگین سیرنشده است.}$$

ترکیب‌های a و d به ترتیب، صابون مایع و استر سنگین (نوعی چربی) هستند و مخلوط استر سنگین و آب، ناپایدار است و دو لایه مجزا تشکیل می‌دهد. در صورتی که مقداری صابون به این مخلوط اضافه کنیم، یک کلوئید به دست می‌آید که مخلوطی پایدار و به ظاهر همگن است.

صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسید چرب هستند؛ بنابراین اگر به جای بخش کاتیونی ترکیب a همان کاتیون K^+ ، کاتیون NH_4^+ قرار گیرد، هم‌چنان صابون به حالت مایع می‌ماند و حالت فیزیکی آن تغییری نمی‌کند.

۹۷- گزینه ۳

درس‌نامه تفاوت در خواص، مزه، رنگ و بوی ادویه‌ها، میوه‌ها و بسیاری از مواد دیگر به دلیل تفاوت در ساختار و وجود گروه‌های عاملی متفاوت در آن‌هاست.

نام برخی از مواد و گروه‌های عاملی موجود در آن‌ها در زیر آمده است.

نام ماده	نام ترکیب موجود	گروه عاملی
بادام	بنزالدهید	آلدهید
دارچین	x	آلدهید
میخک	۲- هپتانون	کتون
زردچوبه	x	کتون
رازیانه	x	اتر
گشنیز	x	الکل (هیدروکسیل)
تمشک و توت‌فرنگی	بنزوئیک اسید	کربوکسیلیک اسید (کربوکسیل)
هندوانه و گوجه‌فرنگی	لیکوپن	فاقد گروه عاملی
بوی آناناس	اتیل بوتانات	استر
بوی موز	پنتیل اتانات	استر

نمودار درجه یونش برحسب غلظت اسید:

دیدیم که برای اسیدهای ضعیف، رابطه تقریبی $K_a \approx M\alpha^2$ برقرار است. در دمای معین، K_a عدد ثابتی است؛ بنابراین از این رابطه نتیجه می‌گیریم که درجه یونش اسیدهای ضعیف با غلظت محلول آن‌ها رابطه وارونه دارد؛ یعنی هر چه محلول غلیظ‌تر باشد، درجه یونش اسید در آن کم‌تر است:

$$K_a \approx M\alpha^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K_a}{M}}$$

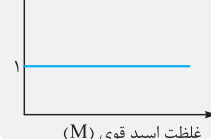
نمودار α برحسب M خطی نیست. رابطه وارونه دارد.



با توجه به رابطه بالا، برای محاسبه نسبت درجه یونش یک اسید خیلی ضعیف در دو محلول با غلظت متفاوت، می‌توان از رابطه مقابل استفاده کرد:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

بچه‌ها مراقب باشید! اسیدهای قوی به طول کامل یونش می‌یابند؛ بنابراین تغییر غلظت آن‌ها تأثیری بر درجه یونش اسید ندارد.



با استفاده از ثابت یونش اسید و غلظت محلول، درجه یونش را قبل از افزودن آب به دست می‌آوریم. حواستون باشه مقدار K_a (۰/۵)، عدد کوچکی نیست و باید از روابط اصلی K_a استفاده کنیم.

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{K_a=0.5, M=1} \frac{1}{2} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = \frac{-1 \pm 2}{4} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{4} \text{ غ.ق.} \\ \alpha_2 = \frac{1}{4} = 0.25 \end{cases}$$

غلظت مولی محلول پس از افزودن آب را حساب می‌کنیم:

با افزودن آب، درجه یونش اسید دو برابر شده و از ۰/۲ به ۰/۴ می‌رسد. با توجه به این که دما ثابت است، مقدار ثابت یونش اسید نیز ثابت است و تغییری نمی‌کند؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$[H^+] = M\alpha = 0.4M$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \xrightarrow{K_a=0.5, M=1} \frac{1}{2} = \frac{(0.4M)^2}{M - 0.4M} = \frac{0.16M^2}{0.6M} = \frac{4}{15}M$$

$$\Rightarrow M = \frac{15}{4 \times 4} = \frac{3}{16} \text{ mol.L}^{-1}$$

حجم آب اضافه‌شده را حساب می‌کنیم:

با افزودن آب، غلظت محلول از ۱ مولار به $\frac{3}{16}$ مولار رسیده است. با توجه به این که بر اثر افزایش حجم محلول، شمار مول‌های اسید تغییری نمی‌کند، خواهیم داشت:

$$M_1V_1 = M_2V_2 \xrightarrow{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی} = \text{مول اسید}} \text{مول اسید (۱)} = \text{مول اسید (۲)}$$

$$\Rightarrow 1 \times 1 = \frac{3}{16} \times V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{16}{3} L$$

$$V_2 - V_1 = \frac{16}{3} - 1 = \frac{13}{3} L = \frac{13000}{3} \text{ mL} \approx 4333 \text{ mL}$$

۱۰۱ - گزینه ۴

☆ نکته مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب یونی:

الف) هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکه آن، بزرگ‌تر است.

ب) هر چه شعاع یون‌ها کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکه بلور، بزرگ‌تر است.

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند

ا) با توجه به شماره گروه عناصرها، X, D, M به ترتیب یون‌های X^{2-}, D^{3+}, M^{2+} را تشکیل می‌دهند؛ پس مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در ترکیب حاصل از واکنش X و D ($3+2=5$) بزرگ‌تر از این مجموع در ترکیب حاصل از واکنش M و Y ($2+1=3$) است، از این رو D_2X_3 آنتالپی فروپاشی بیشتری نسبت به MY_2 دارد.

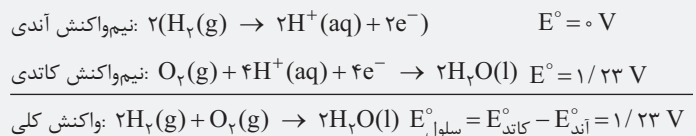
ب) ترکیب $(K_2O)A_3X$ آنتالپی فروپاشی کم‌تری نسبت به $(MgO)MX$ دارد؛ پس نقطه ذوب آن کم‌تر است.

پ) ترکیب حاصل از واکنش A و X ، A_2X و ترکیب حاصل از واکنش Y و M ، MY_2 است، نسبت شمار کاتیون به آنیون در A_2X مانند نسبت شمار آنیون به کاتیون در MY_2 برابر با ۲ است.

ت) یک فلز واسطه است و اکسید آن، ترکیب یونی به حساب می‌آید اما هر دو عنصر X و Y (اکسیژن و کلر) نافلز هستند و ترکیب حاصل از واکنش آن‌ها، یک ماده مولکولی به شمار می‌رود. ساختار ترکیب‌های یونی و مواد مولکولی کلی با هم فرق دارد!

۱۰۲ - گزینه ۳

☆ نکته نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی و واکنش کلی سلول سوختی هیدروژن



با اکسایش هر مول H_2 در سلول سوختی، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود:



$$2/5 \text{ g } H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} \times \frac{2 \text{ mole}^-}{1 \text{ mol } H_2} = 2/5 \text{ mole}^-$$

در سلول گالوانی $Al - Cu$ ، با اکسایش ۱ مول یا ۲۷ گرم آلومینیم، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود:

$$Al \rightarrow Al^{3+} + 3e^-$$

$$2/5 \text{ mole}^- \times \frac{27 \text{ g } Al}{3 \text{ mole}^-} = 22/5 \text{ g } Al$$

۱۰۳ - گزینه ۴

☆ نکته یک واکنش زمانی به تعادل می‌رسد که غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش، ثابت شود.

در شکل‌های داده‌شده مولکول دواتمی بزرگ‌تر همان گاز N_2 ، مولکول دواتمی کوچک‌تر همان H_2 و مولکول چهاراتمی همان NH_3 است و با توجه به این که در زمان‌های ۴۰ و ۶۰ دقیقه، غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش تغییری نکرده است، تعادل ۴۰ دقیقه پس از شروع واکنش برقرار شده است؛ در نتیجه می‌توان گفت که در سامانه تعادلی، ۱/۱۰ مول N_2 و ۶/۰۰۶ مول H_2 و ۶/۰۰۶ مول NH_3 وجود دارد؛ پس خواهیم داشت:

$$K = \frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3} = \frac{(0/6)^2}{(1/10) \times (0/6)^3} = \frac{1000}{6} = 1667$$

برای قسمت دوم سؤال، با توجه به ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش، رابطه سرعت متوسط واکنش و سرعت متوسط مصرف یا تولید مواد را به صورت زیر می‌نویسیم و به دلخواه سرعت متوسط مصرف گاز N_2 را در ۲۰ دقیقه دوم واکنش یا همان زمان‌های ۲۰ تا ۴۰ دقیقه به دست می‌آوریم:

$$\bar{R}(N_2) = \frac{\bar{R}(H_2)}{3} = \frac{\bar{R}(NH_3)}{2}$$

$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{(1-2) \times 0/1 \text{ mol}}{10 \text{ L}} = \frac{0/1}{10 \times 20} = 5 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

۱۰۴ - گزینه ۴

همه عبارت‌های داده‌شده، جمله داده‌شده را به درستی کامل می‌کنند.

بررسی عبارت‌ها: $\diamond NaOH$ ، یک باز قوی است که در صورت انحلال با آب، یون‌های OH^- تولید می‌کند؛ با افزودن $NaOH$ به تعادل $H^+(aq) + F^-(aq) \rightleftharpoons HF(aq)$ ، یون‌های OH^- حاصل از انحلال سود، با یون‌های H^+ موجود در تعادل واکنش داده و مولکول H_2O تولید می‌شود؛ بنابراین غلظت یون‌های H^+ در تعادل کاهش یافته و طبق اصل لوشاتلیه برای جبران کاهش غلظت این یون‌ها، مولکول‌های HF بیشتری یونیده می‌شوند؛ پس درجه یونش اسید HF افزایش می‌یابد.

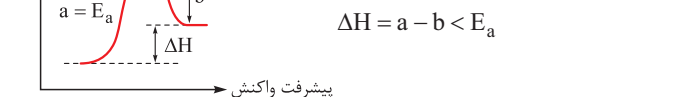
$\diamond$ تغییر فشار یا حجم بر جابه‌جایی تعادل‌هایی اثر دارد که مجموع تعداد مول‌های گازی واکنش‌دهنده‌ها با فراورده‌ها برابر نباشد؛ پس کاهش حجم در تعادل $CO(g) + H_2O(g) \rightleftharpoons CO_2(g) + H_2(g)$ هیچ تأثیری بر جابه‌جایی تعادل ندارد، اما از آن‌جا که با کاهش حجم، تعداد مول CO_2 در واحد حجم افزایش پیدا می‌کند، غلظت این ماده نیز افزایش پیدا خواهد کرد.

$\diamond$ با افزودن گاز H_2 به تعادل $Fe_2O_3(s) + 2H_2(g) \rightleftharpoons 2Fe(s) + 2H_2O(g)$ ، طبق اصل لوشاتلیه تعادل در جهت مصرف بخشی از گاز H_2 اضافه‌شده (در جهت رفت) جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین غلظت بخار آب نیز افزایش می‌یابد. از آن‌جایی که در تعادل جدید، غلظت H_2O و H_2 هر دو زیاد شده است، پس سرعت هر دو واکنش رفت و برگشت در تعادل جدید نسبت به تعادل قبلی بیشتر می‌شود.

$\diamond$ واکنش $2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$ گرماده است که با کاهش دما در این تعادل، طبق اصل لوشاتلیه برای جبران کم‌شدن دما، تعادل در جهت تولید گرما یا همان در جهت رفت جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین ثابت تعادل افزایش می‌یابد.

۱۰۵ - گزینه ۱

آنتالپی یک واکنش، برابر تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها است که با حاصل $(a-b)$ در نمودار برابر است.



☆ نکته در واکنش‌های گرماگیر، مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش همواره بیشتر از ΔH واکنش است: $E_a > \Delta H$ ؛ واکنش‌های گرماگیر ($\Delta H > 0$)

بررسی سایر گزینه‌ها: $\diamond$ اگر انرژی ذرات واکنش‌دهنده کم‌تر از انرژی فعال‌سازی واکنش باشد، واکنش انجام نمی‌شود (واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل نمی‌شوند).

$\diamond$ واکنش مورد نظر گرماگیر است؛ اما واکنش حذف NO در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی ($2NO \rightarrow N_2 + O_2$)، گرماده می‌باشد.

$\diamond$ در واکنش‌های گازی گرماگیر، مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده بیشتر از مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده است.

$$\Delta H = \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده} \right]$$

$$\Delta H > 0 \Rightarrow \left(\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده} \right) > \left(\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده} \right) \Rightarrow \text{واکنش گرماگیر}$$

